Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 38. OLIMPIĀDE

4. klase

38.1. Iedomāsimies, ka no naturālo skaitļu virknes 1, 2, 3, 4, … izsvītroti visi tie skaitļi, kas dalās ar 6. Atrast, kurš skaitlis starp palikušajiem atrodas

a) desmitajā,

b) 1988-jā vietā ?

38.2. Balta kuba virsmas nokrāsošanai vajag 1 kg krāsas. Iedomāsimies, ka tas pats baltais kubs sagriezts $10\times10\times10$ mazākos vienādos kubiņos. Cik krāsas vajag visu šo kubiņu nokrāsošanai? (Pieņemsim, ka abos gadījumos krāsas slāņiem jābūt ar vienādu biezumu)

38.3. a) Pamatojiet, kāpēc nevar aizstāt burtus ar cipariem (vienādus ar vienādiem, dažādus ar dažādiem) tā, lai iegūtu pareizu saskaitīšanas piemēru:

$$\begin{array}{ccccc} & D & I & V & I \\ + & D & I & V & I \\ \hline Č & E & T & R & I \end{array}$$

b) Vai to var izdarīt, ja diviem dažādiem burtiem (bet ne vairāk) var atbilst dažādi cipari?

38.4. Andris saskaitīja sešus viens otram sekojošus naturālus skaitļus un ieguva rezultātu, kurā katrs cipars no 2 līdz 9 sastopams vienu reizi, bet cipars 1 -- divas reizes. Pierādīt, ka Andris kļūdījās.

38.5. Uz taisnes sēž trīs sienāži. Ik pa brīdim kāds no tiem pārlec pāri vienam no abiem pārējiem (bet ne abiem reizē). Vai var gadīties, ka pēc tam, kad visi sienāži kopā izdarījuši tieši 1001 lēcienu, katrs no tiem atrodas tai pašā punktā, kur atradās sākumā ?

5. klase

38.6. Dots, ka $|a| \le 10$, $|b| \le 10$, $|c| \le 10$. Kādu vislielāko vērtību var pieņemt izteiksme $3a - 2b + 7c$?

38.7. Šorīt skolēnu teātra trupas dalībnieks Andris sareizināja savu pilno gadu skaitu, dzimšanas datumu un tā mēneša kārtas numuru, kurā viņš dzimis. Iznāca 2821. Kad Andris dzimis? (Norādiet gadu, mēnesi un datumu.)

38.8. Rūtiņu lapā uzzīmēts kvadrāts, kas sastāv no 5×5 rūtiņām. Uzzīmēt slēgtu lauztu līniju, kas neiziet ārpus kvadrāta, pati sevi krusto vismaz 10 punktos un kuras visi posmi iet pa rūtiņu līnijām.

38.10. Jānis sareizināja visus naturālos skaitļus no 1 līdz 13 (ieskaitot) un atrada rezultāta otro pakāpi. Iznāca

$$387757880 * 3632640000,$$

kur viens cipars aizstāts ar zvaigznīti.
Atrodiet, kāds cipars aizstāts ar zvaigznīti.

6. klase

38.11. Dots, ka *a* un *b* ir neparalēlas taisnes. Plaknē uzzīmēja vēl 10 taisnes; katra no tām paralēla vai nu *a*, vai *b*. Pēc tam taisnes *a* un *b* nodzēsa.
Cik punktos krustojas palikušās 10 taisnes ?
Atrodiet visas iespējas un pierādiet, ka citu, bez jūsu atrastajām, nav.

38.12. Koordinātu plaknē atzīmēti punkti $(1, 3), (4, 2), (7, 4), (4, 6), (10, 6)$. Cik ir tādu lineāru funkciju, kuru grafiki iet caur vismaz diviem no šiem punktiem ?

38.13. Naturālus skaitļus no 1 līdz 25 ieskaitot jāsadala vairākās grupās (katram skaitlim jānonāk tieši vienā grupā) tā, lai katrā grupā mazākais skaitlis būtu 8 reizes mazāks par visu citu šīs grupas skaitļu summu.
Vai to var izdarīt ?

38.14. Uz tāfeles uzrakstīts vienādojums

$$13x + 41 = 0.$$

Ar vienu gājienu atļauts palielināt vai pamazināt par 1 vai nu koeficientu pie *x*, vai brīvo locekli (katrā gājienā tikai vienu no tiem). Daudzkārt izpildot šādus gājienus, jāiegūst vienādojums

$$17x + 11 = 0.$$

Vai to var izdarīt tā, lai nevienam no pārveidojumu gaitā iegūtajiem vienādojumiem nebūtu veselu sakņu ?

38.15. Uz skaitļu taisnes atzīmēti 15 punkti 1, 2, 3, … , 14, 15. Vienā no tiem sēž sienāzis. Ar vienu lēcienu sienāzis var pārlēkt pa labi vai kreisi (pēc savas izvēles) par vienu no četriem attālumiem: 4, 5, 6 vai 7. Lēkāšanas gaitā sienāzis drīkst nonākt tikai atzīmētajos punktos.

Vai sienāzis var lēkāt tā, lai katrā no atzīmētajiem punktiem nonāktu tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgrieztos izejas punktā ?

7. klase

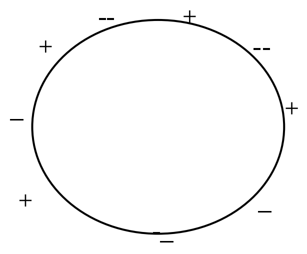
38.16. Pierakstiet katram no skaitļiem $11, \sqrt{45}, \sqrt{121}, \sqrt{5}, \sqrt{80}$ "plus" vai "mīnus" zīmi tā, lai iegūto skaitļu summa būtu nulle. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to var izdarīt.

38.17. Izliektā četrstūrī *ABCD* punkti *M*, *N*, *P* un *K* ir malu *AB* un *CD* un diagonāļu *AC* un *BD* viduspunkti. Dots, ka nekādi trīs no punktiem *M*, *N*, *P* un *K* neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka *M*, *N*, *P* un *K* ir paralelograma virsotnes.

38.18. Pierādīt, ka $2^6 + 2^4 \cdot 7^5 + 7^{10}$ ir salikts skaitlis.

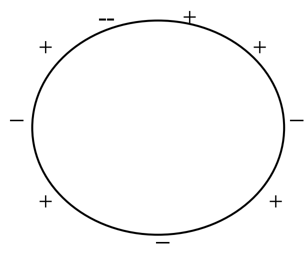
38.19. Kvadrātiska tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai iespējams tās rūtiņās ierakstīt dažādus nenulles ciparus tā, lai no katriem diviem blakus ierakstītajiem cipariem varētu sastādīt pirmskaitli, abus ciparus izmantojot katru tieši vienu reizi ?
(Ciparus sauc par blakus ierakstītiem, ja tie atrodas rūtiņās, kurām ir kopīga mala.)

38.20. Pa apli ierakstītas "+" un "-" zīmes, kā parādīts zīmējumā:



38.1. zīm.

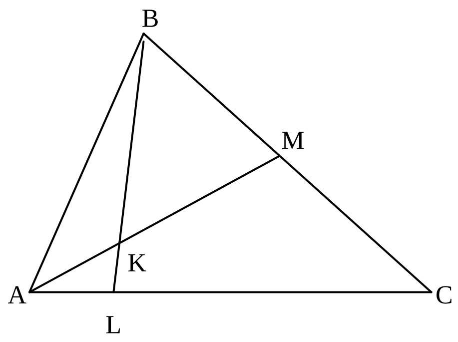
Ar vienu gājienu atļauts mainīt uz pretējām jebkuras divas zīmes. Vai, daudzkārt izpildot šādus gājienus, var iegūt ainu, kas attēlota 38.2. zīmējumā.



38.2. zīm.

8. klase

38.21. Trijstūrī *ABC* novilkta mediāna *AM*. Uz tās ņemts tāds punkts *K*, ka $AK : KM = 1 : 2$. Taisne *BK* krusto malu *AC* punktā *L*. Atrast attiecību $AL : LC$ (skat. 38.1. zīm.).



38.1.zīm.

38.22. Andris iedomājies veselu pozitīvu skaitli x, kas apmierina nevienādības $1 \le x \le 12$. Juris viņam var uzdot jautājumus: "Vai taisnība, ka Tu esi iedomājies skaitli y ?" (Juris pats izvēlas y vērtības). Uz katru jautājumu Andris atbild:

a) "Tev ir taisnība", ja $x = y$;

b) "Tu esi tuvu patiesībai", ja $0 < |x - y| \le 3$;

c) "Tu esi tālu no patiesības", ja $|x - y| > .3$.

Pierādīt, ka Juris var panākt, lai Andris pateiktu "Tev ir taisnība", uzdodot ne vairāk kā 4 jautājumus.

38.23. Šaurleņķa trijstūrī ABC ievilktā riņķa līnija pieskaras malām AB un CB attiecīgi punktos N un M. Zināms, ka $AM = NC$. Pierādīt, ka ABC ir vienādsānu trijstūris.

38.24. Dots, ka vienlaicīgi izpildās vienādības

$$x + y + z = 5 \text{ un } xy + xz + yz = 3 .$$

Pierādīt, ka $-1 \le z \le \frac{13}{3}$.

38.25. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu

$$x^3 - y^3 = 2xy + 8 ,$$

ja zināms, ka $x \ge 0$ un $y \ge 0$.

9. klase

38.26. Četrstūra piramīdā $ABCDS$ punkts S ir virsotne, $ABCD$ -- pamats. Konstruēt zīmējumā piramīdas šķēlumu ar plakni, kas iet caur šķautņu SA un CD viduspunktiem un skaldnes SBC mediānu krustpunktu.

38.27. Vai var atrast 1988 dažādus naturālus skaitļus tā, lai neviens no šiem skaitļiem, ne arī to summas pa 2, pa 3, … , pa 1988 nebūtu vesela skaitļa kvadrāts?

38.28.a) Vai eksistē tāds x, ka vienlaicīgi pastāv nevienādības

$\sin(ix) < 0$, ja $i = 1; 3; 5; \ldots ; 1985;$

$\sin(ix) > 0$, ja $i = 2; 4; 6; \ldots ; 1986;$

un $\sin(1987x) > 0$.

38.28.b) Kastē atrodas 100 vienādas formas un materiāla zīmītes, uz kurām uzrakstīts pa vienam naturālam skaitlim no 1 līdz 100 (katrs skaitlis uz vienas zīmītes). Andris un Juris reizē uz labu laimi izvelk pa vienai zīmītei.

Ja izvilkto skaitļu summa ir pāra skaitlis, uzvar Andris; ja tā ir nepāra skaitlis, uzvar Juris. Vai abiem Zēniem ir vienādas izredzes uzvarēt ?

38.29. Dots izliekts četrstūris *ABCD* ar laukumu *S*. No punkta *O* atlikti vektori

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{OK} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DA}.$$

Atrast četrstūra *MNKL* laukumu.

38.30. Pozitīvi skaitļi *a*, *b* un *c* ir trijstūra malu garumi un apmierina vienādību

$$2\left(bc^2 + ca^2 + ab^2\right) = b^2c + c^2a + a^2b + 3abc.$$

Pierādīt, ka šis trijstūris ir vienādmalu.

10. klase

38.31. Dots, ka $\sin x + \cos x = a, \quad \sin y + \cos y = b$.
Aprēķināt $\sin(x+y)\cdot\cos(x-y)$.

38.32. Doti 6 dažādi naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 107. Pierādīt, ka no šiem skaitļiem var izvēlēties 3 skaitļus tā, lai katru divu izvēlēto skaitļu reizinājums būtu lielāks par trešo.

38.33. Riņķa līnijā ω novilkta horda *AB*, kas nav diametrs. Uz šīs hordas atzīmēts punkts *N*, kas nesakrīt ne ar *A*, ne ar *B*. Konstruētas divas dažādas riņķa līnijas ω_1 un ω_2; katra no tām pieskaras hordai *AB* punktā *N* un Riņķa līnijai ω.
Pierādīt, ka ω_1 un ω_2 rādiusu attiecība (mazākais pret lielāko) nav atkarīga no punkta *N* stāvokļa uz hordas *AB*.

38.34. Uz katras no piramīdas *ABCD* šķautnēm atzīmēts vektors ar garumu 1. Kādas vērtības var pieņemt visu šo vektoru summas garums (modulis) ?

38.35. Skaitļi $a_0, a_1, \ldots, a_{17}$ izvēlēti tā, ka vienādība

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{16} + x^{17} =$$
$$a_0 + a_1(x+1) + a_2(x+1)^2 + \cdots + a_{17}(x+1)^{17}$$

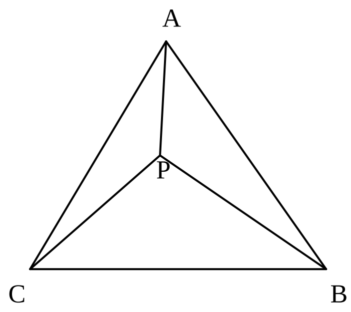
ir identitāte.

a) atrast a_0,

b) atrast a_1.

11. klase

38.36. Regulāra trijstūra *ABC* iekšpusē ņemts punkts *P* (skat. 38.2. zīm.). Pierādīt, ka var atrast trijstūri, kura malas vienādas ar *PA*, *PB* un *PC*.



38.2. zīm.

38.37. Dots, ka a un b -- naturāli skaitļi un $a^2 + b^2$ dalās ar 3. Pierādīt, ka $a^2 + b^2$ dalās ar 9.

39.38. Taisnā trijstūra prizmā M un M_1 ir pamatu mediānu krustpunkti, O -- nogriežņa MM_1 viduspunkts. Caur O novilkta plakne, kas krusto visas prizmas sānu šķautnes.
Pierādīt, ka tā dala prizmas tilpumu uz pusēm.

39.39. Vai eksistē tāda visur definēta funkcija $f(x)$, visiem x ir pareiza vienādība

$$f(f(x)) = \sin x \ ?$$

39.40. Skaitļi $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ir no intervāla $[0, 1]$.

Pierādīt, ka var atrast tādu skaitli a no šī intervāla, ka

$$|a - x_1| + |a - x_2| + \cdots + |a - x_n| = \frac{n}{2}.$$