Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

# LATVIJAS RAJONU 41. OLIMPIĀDE

## ATRISINĀJUMI

**41.1.** Ir iespējams, ka abi skaitļi ir sešciparu; piemēram, $111222+111111=222333$ un $111222-111111=111$.

Ir iespējams, ka abi skaitļi ir piecciparu; piemēram, $55666+55555=111221$ un $55666-55555=111$.

Ir iespējams, ka viens no skaitļiem ir sešciparu, bet otrs piecciparu; piemēram $100000+99889=199889$ un $100000-99889=111$.

Citu iespēju nav.

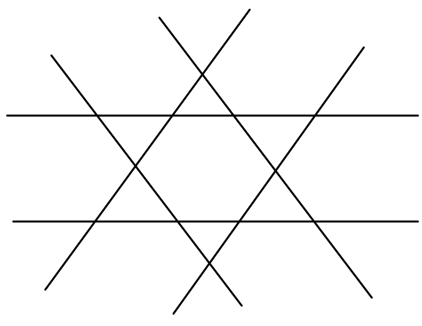
**41.2.** To var izdarīt, piemēram, tā ka parādīts 41.3. zīmējumā.

$$
\begin{array}{ccccccc}
[6] & - & 1 & + & [3] & = 8 \\
+ & & \times & & : & \\
[2] & \times & [2] & + & [3] & = 7 \\
\times & & + & & + & \\
[1] & \times & [5] & - & [1] & = 4 \\
= 8 & & = 7 & & = 2 &
\end{array}
$$

41.3. zīm.

**41.3.** Sadalām skaitļus grupās pa 7 pēc kārtas. Vienā grupā atlikumu summa ir $1+2+3+4+5+6+0=21$. Tā kā $1992=7\cdot 284+4$, tad meklējamā summa ir $21\cdot 284+(1+2+3+4)=5974$.

**41.4.** To var izdarīt, piemēram, tā ka parādīts 41.4. zīmējumā.



41.3. zīm.

**41.5.** Grupā ir tieši viens "patiesis". Ja "patiešu" grupā vispār nebūtu, tad "meļu" apgalvojumi visi būtu patiesi, bet tā nevar būt. Ja "patiešu " būtu vairāk par vienu, tad patiesis, sakot apgalvojumu: "Jūs visi esat meļi", būtu samelojis.
Tātad "patiesis" ir tieši viens, bet meļu skaits ir 1990.

**41.6.** Skaidrs, ka divi no stariem iet vienā virzienā (teiksim pozitīvajā), bet trešais -- pretējā virzienā. Izvēloties staru, kurš iet negatīvajā virzienā un staru, kuram no abiem "pozitīvajiem" virsotne atrodas pa kreisi no otra, iegūstam divus starus, kas pārklāj visu taisni.

**41.7.** Nē, nevar. Apskatām tās trīs šķautnes, uz kurām uzrakstīti skaitļi 1, 3 un 5. Vismaz divām no tām ir kopēja šķautne. Caur abiem šķautnes galiem iet vēl viena skaldne. Vienā no tām nebūs ierakstīts nepāra skaitlis. Šo trīs skaitļu summa nebūs nepāra skaitlis.

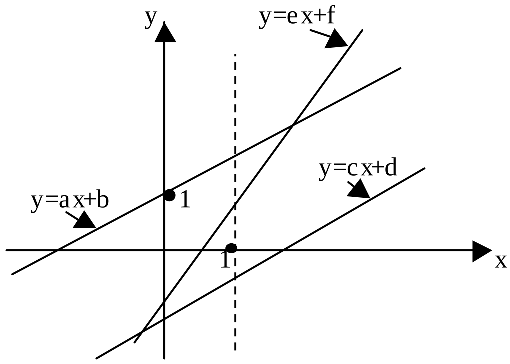
**41.8.** Pieņemsim, ka ģimeņu skaits ir $n$. Katrā ģimenē ir vismaz viens dēls. Tātad zēnu skaits ir vismaz $n$. Tā kā meiteņu ir ne mazāk kā zēnu, tad kopā bērnu ir vismaz $2n$, bet vecāku ir tieši $2n$. Tātad pieaugušo mājā nav vairāk par bērniem.

**41.9.** Tāds skaitlis, piemēram, ir 54.
Tiešām, 54 dalās ar 6; $54+1=55$ dalās ar 5; $54+2=56$ dalās ar 4; $54+3=57$ dalās ar 3; $54+4=58$ dalās ar 2.

Tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz. Piemēram, visi skaitļi, kas uzrakstāmi formā $60k+54$ .

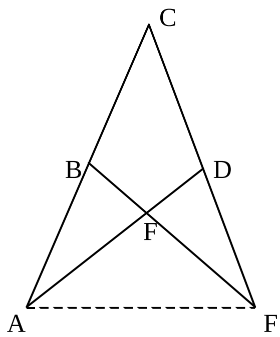
**41.10.** Pareizi spēlējot var uzvarēt pirmais spēlētājs. Pirmajā gājienā tas apēd 5 konfektes un kaudzītē paliek 15 konfektes. Otrais spēlētājs var apēst ne vairāk kā 7 konfektes; tas nozīmē, ka kaudzītē paliks no 8 līdz 14 konfektēm. Tad pirmais apēd tik konfektes, lai kaudzītē atliktu 7 konfektes (tas ir iespējams).
Otrais spēlētājs var apēst ne vairāk kā 3 konfektes; tas nozīmē, ka kaudzītē paliks no 4 līdz 6 konfektēm. Tad pirmais apēd tik konfektes, lai kaudzītē atliktu 3 konfektes (tas ir iespējams).
Tagad otrajam ir jāēd 1 konfekte, paliek divas. Vienu noēd pirmais spēlētājs, paliek 1 konfekte, kuru otrs spēlētājs ēst nedrīkst -- līdz ar to viņš ir zaudējis.

**41.11.** Aplūkojamās summas ir funkciju vērtības pie $x=1$. Zīmējumā redzams, ka $c+d<e+f<a+b$.




41.4. zīm.

**41.12.** Skat. 41.5. zīm.




41.5. zīm.

Tā kā $AF=FE$, tad $AFE$ ir vienādsānu trijstūris un $\angle FAE=\angle FEA$; līdz ar to iegūstam, ka $\angle CAE=\angle BAF+\angle FAE=\angle DEF+\angle FEA=\angle CEA$. Tas nozīmē, ka $ACE$ ir vienādsānu trijstūris un $AC=EC$. Tātad $BC=AC-AB=EC-DE=DC$.

**41.13.** Var uzrakstīt, piemēram, šādu vienādību

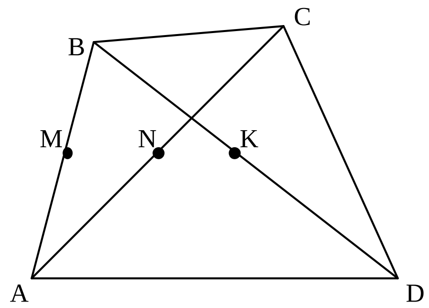
$$(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)\cdot(x-7)\cdot(x-8)\cdot(x-9)=0.$$

**41.14.** Apzīmēsim $3\cdot A=B$, bet skaitļa $x$ ciparu summu ar $S(x)$. Tad $B$ dalās ar 3; $S(B)$ dalās ar 3; $S(A)$ dalās ar 3. No tā seko, ka $A$ dalās ar 3 un $B$ dalās ar 9; Tātad $S(B)$ dalās ar 9; $S(A)$ dalās ar 9 un $A$ dalās ar 9.

**41.15.** Katrs karavīrs, kuram pakļauti citi, papildina armiju ar 7 karavīriem. Tātad kopā ir $1+7\cdot 100=701$ karavīri.

**41.16.** Acīmredzot der $e=1$ (tad $a=1^{16}=1$) un $e=2$ (tad $a=2^{16}<1\,000\,000$). Lielākas *e* vērtības neder, jo tad $a \geq 3^{16} > 1\,000\,000$.

**41.17.** Aplūkosim 41.6. zīm.



41.6. zīm.

$MK \parallel AD$ ka trijstūra *ABD* viduslīnija. Tātad aplūkojama taisne iet caur *AC* viduspunktu *N* paralēli trijstūra *ACD* pamatam *AD*, tātad tā ir trijstūra *ACD* viduslīnija un tāpēc krusto malu *CD* tās viduspunktā.

**41.18.** Var izveidot 6 pirmskaitļus: 2, 3, 5, 41, 67, 89.

Vairāk par 6 pirmskaitļiem izveidot nevar. Ja pirmskaitļu būtu ne mazāk par 7, tad vismaz 6 no tiem būtu nepāra skaitļi (jo ir tikai viens pāra pirmskaitlis 2). Bet mums ir tikai 5 nepāra cipari, ar kuriem būtu jābeidzas nepāra skaitļiem.

**41.19.** No dotās vienādības seko vienādība

$$\frac{b+c+d}{a}=\frac{a+c+d}{b}=\frac{a+b+d}{c}=\frac{a+b+c}{d}$$

Pieskaitot visiem šīs vienādības locekļiem skaitli 1 iegūstam vienādību

$$\frac{a+b+c+d}{a}=\frac{a+b+c+d}{b}=\frac{a+b+c+d}{c}=\frac{a+b+c+d}{d}.$$

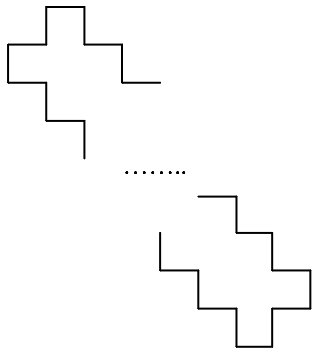
Tā kā visi skaitītāji ir vienādi, tad vienādi ir arī saucēji: $a=b=c=d$. Tātad

$$\frac{a+b}{c+d}+\frac{a+c}{b+d}+\frac{a+d}{b+c}+\frac{b+c}{a+d}+\frac{b+d}{a+c}+\frac{c+d}{a+b}=6.$$

**41.20.** Apejot vienreiz noslēgtu maršrutu pa lauzto līniju, pa labi jāvirzās tikpat reizes, cik pa kreisi. Tātad horizontālo posmu skaits ir pāra skaitlis. Līdzīgi pierāda, ka vertikālo posmu skaits ir pāra skaitlis. Tātad kopējais posmu skaits ir pāra skaitlis un nevar būt vienāds ar 11.

Tā kā aiz katra horizontālā posma seko vertikālais posms, tad horizontālo un vertikālo posmu skaits ir vienāds; tāpēc kopējais posmu skaits dalās ar 4. Tātad līnijai nevar būt arī 90 posmi.

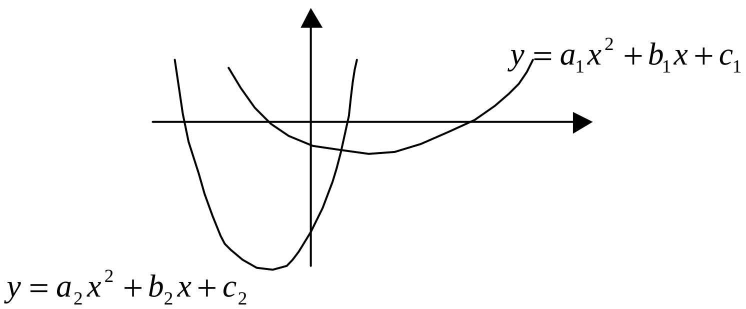
Kā redzams no 41. 7 zīmējuma līnijai var būt 100 posmi. Pagarinot šo zīmējumu diagonālā virzienā nāk klāt 4 posmi; šādā veidā var iegūt līniju ar 4*k* posmiem, ja $k \geq 3$.



41.7. zīm.

**41.21.** Nē, nevar. No pirmajiem 36 pirmskaitļiem viens ir pāra skaitlis 2, bet pārējie nepāra skaitļi. Tāpēc rindiņā, kurā ierakstīts skaitlis 2, skaitļu summa būs nepāra skaitlis, bet pārējās rindiņās pāra skaitļi. Tāpēc šīs summas nevar būt vienādas.

**41.22.** Skat. 41.5. zīm.



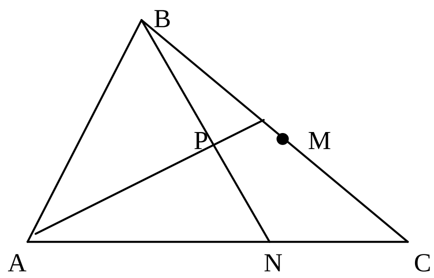

41.5. zīm.

a) $a_2 > a_1$, jo otrā parabola ir stāvāka par pirmo;

b) Parabolu virsotņu abscisu koordinātes ir $x_1 = \frac{-b_1}{2a_1}$ un $x_2 = \frac{-b_2}{2a_2}$. Tā kā $a_1$ un $a_2$ pozitīvi skaitļi un no zīmējuma redzams, ka $x_1 > 0$ bet $x_2 < 0$, tad $b_1 < 0 < b_2$;

c) $c_1$ un $c_2$ ir kvadrātfunkciju vērtības pie $x = 0$; tātad punkti, kuros parabolas krusto *Ox* asi. Redzam, ka $c_1 > c_2$.

**41.23. .** Pieņemsim, ka $c < b$ . Pagarināsim *BP* līdz krustpunktam *N* ar *AC* (skat. 41.6. zīm.).



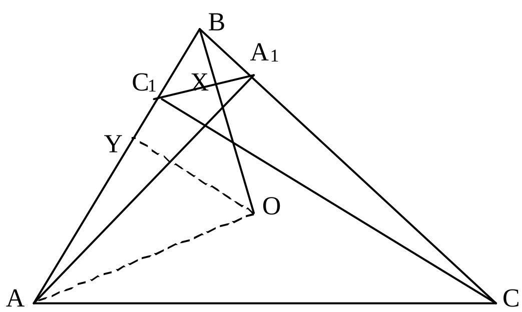

41.6. zīm.

Tad trijstūrī *BAN* nogrieznis *AP* ir reizē augstums un bisektrise. Tāpēc $AN = AB = c$ , $NC = b - c$ un $BP = PN$ . Tātad $PM$ kā trijstūra *NBC* viduslīnijas garums ir $\frac{b-c}{2}$.

Ja $c \geq b$ , tad līdzīgi iegūstam, ka $PM = \frac{c-b}{2}$. Vispārīgajā gadījumā var atbildi pierakstīt šādi: $PM = \left|\frac{c-b}{2}\right|$.

**41.24.** Pieņemsim, ka karaļvalstī ir *n* šahisti. Katrā partijā kopā tiek izspēlēts viens punkts; tātad kopā tika izspēlētas ne vairāk kā 10*n* partijas. Katrā partijā piedalījās 2 šahisti; tātad kopā tie ir piedalījušies 20*n* spēlēs. Ja katrs no tiem būtu izspēlējis vairāk par 20 partijām, tad kopējais piedalīšanās skaits pārsniegtu 20*n*. Tātad vismaz viens no šahistiem neizspēlēja vairāk par 20 partijām.

**41.25.** Skat. zīm. 41.7. zīm.




41.7. zīm.

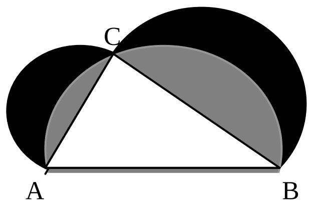
No trijstūru $AA_1B$ un $CC_1B$ līdzības seko, ka $\frac{BC_1}{BA_1} = \frac{BC}{BA}$. No šejienes seko trijstūru *BAC* un $B_1AC_1$ līdzība. Tātad $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$.

Novilksim perpendikulu $OY$ no punkta $O$ pret taisni $AB$. Tā kā $\angle BCA$ ir ievilktais leņķis, tad $\angle BOY = \frac{1}{2}\angle BOA = \angle BCA = \angle BC_1X$ .

Tā kā leņķis $B$ trijstūriem $BYO$ un $BXC_1$ ir kopīgs, tad no divu leņķu vienādības seko, ka tie ir līdzīgi. Tātad $90° = \angle BYO = \angle BXC_1$, no kurienes seko prasītais.

**41.26.** $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2\cdot(-\sin\alpha)^2 = 1 - \sin^2\beta = \cos 2\beta$

**41.27.** Aplūkosim 41.8. zīmējumu.




41.8. zīm.

Trijstūra $ABC$ un pelēko figūru laukumu summa ir $S_{ABC} + S_P = \pi \cdot \dfrac{AB^2}{2}$ .

Melno figūru laukumi summā ar pelēko figūru laukumiem arī dod tādu pašu summu:

$$S_m + S_p = \pi \cdot \frac{1}{2}\left(AC^2 + BC^2\right) = \pi \cdot \frac{AB^2}{2} .$$

No šejienes seko prasītais.

**41.28.** Atzīmēsim lielākā kopīgā dalītāja pamatīpašību:

$$(a, b) = (a, b + ka),$$

kur $k$ -- patvaļīgs vesels skaitlis. Tātad

$$(a_{1990}, a_{1991}) = (a_{1990}, a_{1991} - a_{1990}) = (a_{1990}, a_{1989}) = (a_{1990} - a_{1989}, a_{1989}) =$$
$$(a_{1988}, a_{1989}) = \cdots = (a_1, a_2) = (19, 91) = 1 .$$

Atzīmēsim lielākā kopīgā dalītāja pamatīpašību:

$$(a, b) = (a, b + ka),$$

kur $k$ -- patvaļīgs vesels skaitlis. Tātad

$$(a_{1990}, a_{1991}) = (a_{1990}, a_{1991} - a_{1990}) = (a_{1990}, a_{1989}) = (a_{1990} - a_{1989}, a_{1989}) =$$
$$(a_{1988}, a_{1989}) = \cdots = (a_1, a_2) = (19, 91) = 1 .$$

**41.29.** Ievietojot dotajā vienādībā $x$ vietā $(1-x)$, iegūstam vienādojumu

$$f(x)+2f(1-x)=2(1-x).$$

Apvienojot ar pirmo vienādojumu, iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} 2f(x)+f(1-x)=2x \\ f(x)+2f(1-x)=2\cdot(1-x). \end{cases}$$

Pareizinot pirmo vienādojumu ar 2 un atņemot otru vienādojumu, iegūstam

$$3f(x)=2\cdot 2x-2\cdot(1-x)=6x-2$$

$$f(x)=2x-\frac{2}{3}$$

$$f(1991)=3981\tfrac{1}{3}.$$

**41.30.** Aplūkosim patvaļīgas divas pilsētas $A$ un $B$ ar $X$ apzīmēsim to 11 pilsētu kopu, kur ieiet autostrādes, izejošas no $A$ un ar $Y$ to 11 pilsētu kopu, no kurām autostrādes ieiet pilsētā $B$.

Ja $A\cup X$ un $B\cup Y$ ir kopīga pilsēta, tad no $A$ uz $B$ var nokļūt pa 1 vai 2 autostrādēm.

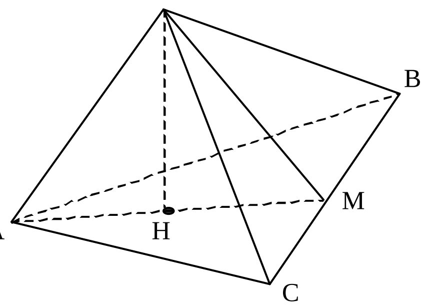
Ja $A\cup X$ un $B\cup Y$ nav kopīgu punktu, tad aplūkosim visus ceļus, kas iziet no $X$ pilsētām. Tādu kopā ir 121. No tiem $C_{11}^{10}=55$ var atgriezties kopā $A\cup X$. Tātad vismaz 121 -- 55 = 66 iziet ārpus kopas $A\cup X$. Tātad tie ieiet vismaz 6 pilsētās. Tā kā kopas $A\cup X$ un $B\cup Y$ satur 24 pilsētas, un kopā to ir 29, tad atlikušo skaits ir 5. Tas nozīmē, ka no $X$ kāda autostrāde vedīs uz $B\cup Y$ pilsētu. Tad no $A$ uz $B$ varēs aizbraukt pa 2 vai 3 autostrādēm.

**41.31.** Nē neeksistē. Polinoma $F(x)$ pakāpi apzīmēsim $\deg F(x)$. Ja polinoms $F(x)$ nav konstante, tad tā atvasinājuma pakāpe ir par 1 mazāka nekā polinoma $F(x)$ pakāpe. Tad no dotajām vienādībām iegūstam

$$\deg P(x)=\deg Q(x)-1=\deg F(x)-2=\deg P(x)-3.$$

Iegūta pretruna.

**42.32.** Ar $\alpha$ apzīmēsim plakni, kas satur punktus *S*, *A* un *H*. (Skat.42.9.zīm.)

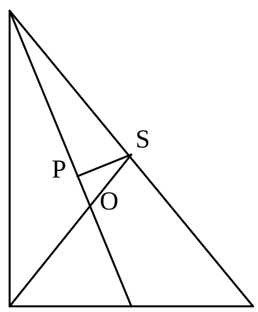



42.9. zīm.

Tā kā $SH \perp BC$ un $SA \perp BC$, tad plakne $\alpha$ ir perpendikulāra nogrieznim *BC*. Tā kā taisne $AH$ pieder plaknei $\alpha$, tad $AH \perp BC$. Arī $SM$ perpendikulārs *BC*, jo pieder plaknei $\alpha$.

Konstrukcijas gaita ir sekojoša. Konstruējam *AH* krustpunktu ar *BC*, ko apzīmējam ar *M* un savienojam *M* ar *S*. *MS* ir skaldnes *SBC* augstums.

**41.33.** Aplūkosim 41.10. zīm.




41.10. zīm.

Pret trijstūra *ABC* hipotenūzu *AB* novelkam mediānu *CS*. Tad $CS = \frac{1}{2} AB = AS$. Apzīmēsim mediānu krustpunktu ar *O*. Tad $OS = \frac{1}{3} CS = \frac{1}{3} AS$. No šejienes seko prasītais:

$$\sin\alpha = \frac{SP}{AS} \le \frac{OS}{AS} = \frac{1}{3}.$$

**41.34.** a) Piemēram, $f(x) = g(x) = 0$.

b) Prasītais seko no vienādībām

$$f(y) = g(y+c) = -g(-y-c) = -f(-y-c-c) = -f(-y-2c) =$$
$$-f(y+2c) = -g(y+3c) = g(-y-3c) = f(-y-3c-c) = f(y+4c).$$

**41.35.** Apzīmēsim ar *S* rūķīšu pāru skaitu, kuri draudzējas, bet kuru mājas ir dažādās krāsās. Viegli redzēt, ka katrā apmeklējumā, kad rūķītis pārkrāso savu māju, šis skaitlis samazināsies. Tā kā tas nevar turpināties bezgalīgi, tad pēc kāda laika skaitlis *S* nemainīsies un pārkrāsošanās izbeigsies.

**41.36.** a) $a^4 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$ .

Ja $a$ =1, tad $a^4 - 1 = 0$ nav pirmskaitlis.

Ja $a > 1$ , tad $a^2 - 1 > 1$ un $a^2 + 1 > 1$, tātad $a^4 - 1$ sadalās divos reizinātājos lielākos par 1 un tas nav pirmskaitlis.

b) Ja *n* nav pirmskaitlis, tad $n = m \cdot k$ , un $a^n - 1$ dalās ar $a^m - 1$, nav pirmskaitlis.

Ja $a > 2$ , tad $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1)$ , no kurienes seko, ka $a^n - 1$ nav pirmskaitlis.

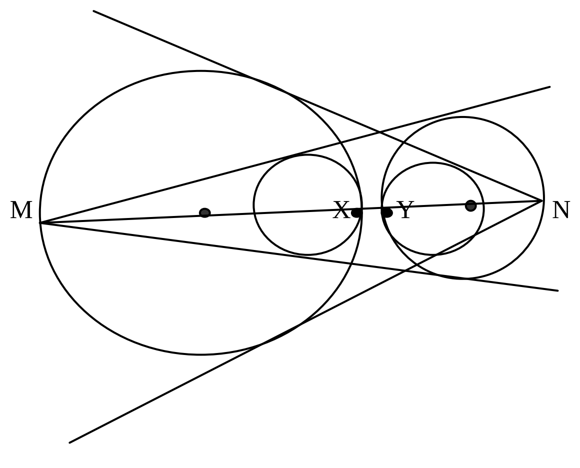
**41.37.** Ievērosim, ka $\log_x y \cdot \log_y x = \log_x x = 1$. Apzīmēsim $\log_x y = a$ . Tad mums ir jāpierāda nevienādība

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad \text{kur } a \text{ pozitīvs skaitlis.}$$

Tā seko no nevienādības starp skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko. Tiešām

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2 .$$

**41.38.**




41.11. zīm.

Riņķa līnijas $\omega_3$ un $\omega_2$ ir homotētiskas ar homotētijas centru punktā *M*. No šejienes seko vienādība $\frac{r_3}{r_2} = \frac{MX}{MN}$ . Līdzīgi seko vienādība $\frac{r_1}{r_4} = \frac{MN}{YN}$ .

Tā kā $YN = 2r_4$ un $MX = 2r_3$, tad $\frac{r_4}{r_3} = \frac{YN}{MX}$

Sareizinot iegūtās vienādības, iegūstam

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot \frac{r_1}{r_4} = \frac{MX}{MN} \cdot \frac{MN}{YN} \cdot \frac{YN}{MX} = 1 .$$

Tātad $r_1 = r_2$.

**41.39.** Vienādību pierādīsim ar matemātisko indukciju.

Ja $n$ = 1, tad pārbaudām vienādību $\sin^3 \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{4}(3\sin\frac{\alpha}{3} - \sin\alpha)$. Tā seko no identitātes

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x.$ To pierāda šādi

$\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x =$

$2\sin\cos^2 x + \sin x(1 - 2\sin^2 x) =$

$2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$

No šejienes seko arī formula

$$\sin x = \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{4}{3}\sin^3 x \qquad (1)$$

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka formula izpildās, ja $n = k$.

$$\sin^3\frac{\alpha}{3} + 3\sin^3\frac{\alpha}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{\alpha}{3^3} + \cdots + 3^{k-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^k} =$$

$$\frac{1}{4}(3^k\sin\frac{\alpha}{3^k} - \sin\alpha).$$

Pārbaudīsim, ka tā izpildās, ja $n = k + 1$.

$\sin^3\frac{\alpha}{3} + 3\sin^3\frac{\alpha}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{\alpha}{3^3} + \cdots + 3^{k-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^k} + 3^k\sin^3\frac{\alpha}{3^{k+1}} =$

$\frac{1}{4}(3^k\sin\frac{\alpha}{3^k} - \sin\alpha) + 3^k\sin^3\frac{\alpha}{3^{k+1}} =$

$\frac{1}{4}\left(3^{k+1}\left(\frac{1}{3}\sin\frac{\alpha}{3^k} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right) - \sin\alpha\right) =$

$\frac{1}{4}\left(3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} - \sin\alpha\right)$

Identitāte pierādīta.

**41.40.** Andris to var uzzināt ar trim jautājumiem. Skaitli, kas uzrakstīts uz sarkanās kartiņas, apzīmēsim ar *a*. Patvaļīgu uz zilās kartiņas uzrakstīto skaitli apzīmēsim ar *b*. Septiņu citu uz zilajām kartiņām uzrakstīto skaitļu grupu apzīmēsim ar *X*. Vēl divus septiņu atšķirīgu skaitļu grupas apzīmēsim ar *Y* un *Z*. Andris var uzdot jautājumu par skaitļu summām, kas ietilpst kopās

$\{a, X, Y\}$
$\{b, X, Z\}$
$\{b, Y, Z\}$ .

Summējot šos skaitļus pēc moduļa 2, Andris noskaidros skaitļa $a$ paritāti.

Tātad ar trim jautājumiem Andris var uzzināt skaitļa $a$ paritāti. Ar diviem jautājumiem nepietiek. Ja izvēlētas tikai divas kopas $A$ un $B$, tad aplūkosim trīs skaitļus: pirmo -- $x$, kas pieder $A$ un nepieder $B$; otro -- y, kas pieder gan $A$, gan $B$; trešo -- z, kas pieder $B$ un nepieder $A$. Izmainot šo skaitļu paritāti, skaitļu summu paritāte grupās $A$ un $B$ nemainās. Tātad, zinot grupu $A$ un $B$ summu paritātes, nevar noteikt neviena skaitļa paritāti.