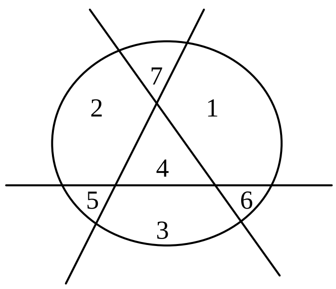
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 43. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

43.1. Pārlokot sloksnīti uz pusēm. Iegūstam 48 cm garu sloksnīti. Pēc tam pārlikam to uz pusēm, un tā 5 reizes. Tā ar locījuma līnijām sadalīsies 32 trīs centimetrus garos gabalos. Atskaitīsim 15 šādus gabalus no sloksnītes gala un nogriezīsim šo gabalu. Šis gabals būs tieši 45 cm garš.

43.2. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 43.5. zīmējumā.



43.5. zīm.

Iespējami arī citi varianti.

43.3. Dotais reizinājums ir lielāks par

$$36\,000\,000 \times 58\,000\,000 = 2\,088\,000\,000\,000\,000$$

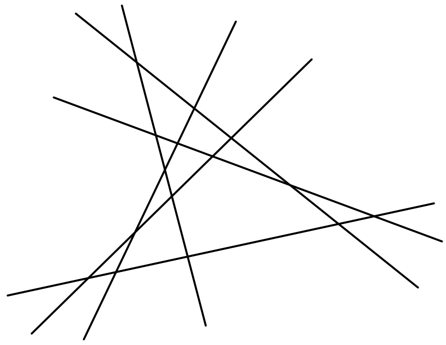
un mazāks par

$$37\,000\,000 \times 59\,000\,000 = 2\,203\,000\,000\,000\,000\ ,$$

Tātad tas satur 16 ciparus un sākas ar 2.

Reizinājuma pēdējais cipars ir atkarīgs tikai no reizinātāju pēdējā cipara; tā kā $9 \cdot 2 = 18$, tad reizinājuma pēdējais cipars ir 8.

43.4. Var uzzīmēt nogriežņus tā, lai katrs krustotos ar katru un visi krustpunkti būtu dažādi; piemēram, kā parādīts 43.6. zīmējumā.



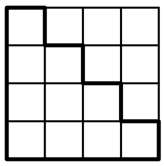
43.6. zīm.

Šeit veidojas 15 krustpunkti. Tā kā divi nogriežņi nevar krustoties vairāk kā vienā punktā, tad kopējais krustpunktu skaits nevar būt lielāks par 15.

Pakāpeniski saīsinot no viena gala kādu no nogriežņiem, viens krustpunkts pazudīs. Iegūsim 14 krustpunktus. Atkārtojot šo procesu iegūsim 13, 12, 11, …, 0 krustpunktus.

Atbilde: krustpunktu skaits var būt jebkurš vesels skaitlis no 0 līdz 15.

43.5. a) Jā, tā var būt; skat. 43.7. zīm.



43.7. zīm

`

b) Jā, tā var būt; zīmējumu veidojam līdzīgi a) punkta zīmējumam, tikai "kāpnīti" ievietojam kvadrātā ar izmēriem 499×499.

c) Nē, nevar būt. Ievērosim, ka stūru skaits ir vienāds ar līnijas posmu skaitu. Bet posmu skaitam ir jābūt pāra skaitlim, jo aiz katra horizontālā posma seko vertikālais posms un otrādi. Tas nozīmē, ka horizontālo un vertikālo posmu skaiti ir vienādi, un kopējais posmu skaits ir pāra skaitlis.

43.6. Tāds skaitlis, piemēram, ir $1994\frac{1993}{1994}$. Tiešām,

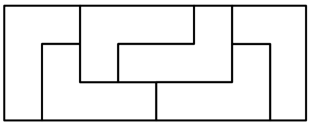
$$\left[1994\tfrac{1993}{1994}\right] = 1994,\quad \left\{1994\tfrac{1993}{1994}\right\} = \tfrac{1993}{1994} \quad \text{un}$$

$$\left[1994\tfrac{1993}{1994}\right] \cdot \left\{1994\tfrac{1993}{1994}\right\} = 1994 \cdot \tfrac{1993}{1994} = 1993.$$

Pavisam tādu skaitļu ir bezgalīgi daudz. Varam izvēlēties jebkuru naturālu skaitli $n \geq 1994$ un iegūt prasīto skaitli $n + \frac{1993}{n}$.

43.7. a) Nē, nevar, jo kopējais taisnstūra rūtiņu skaits nedalās ar 4, bet katra figūra aizņem 4 rūtiņas; tātad kopējais noklāto rūtiņu skaits dalīsies ar 4.

b) Jā, var; skat., piemēram, 43.8. zīm.



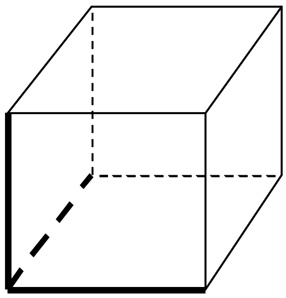
43.8. zīm.

43.8. Skaitlis 45 sarkanajā rindā pirmo reizi parādās zem skaitļa 99999. Bet tieši pirms šī skaitļa zilajā rindā atrodas skaitļi

99954, 99963, 99972, 99981, 99990

Zem šiem skaitļiem būs parakstīti skaitļi 36. Tātad sarkanajā rindā ātrāk parādīsies pieci pēc kārtas skaitļi 36.

43.9. Jā, var. Visas šķautnes var iedalīt trīs virzienu grupās (no katras virsotnes iziet pa vienam nogrieznim katrā virzienā; skat. 43.9. zīm.)



43.9. zīm.

Visas pirmajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 1, 4, 7, 10 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 1; tos var pierakstīt kā $3a+1$). Visas otrajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 2, 5, 8, 11 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 2; tos var pierakstīt kā $3b+2$). Visas trešajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 3, 6, 9, 12 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 0; tos var pierakstīt kā $3c$). Tad katrā virsotnē ieejošo šķautņu numuru summa ir

$$(3a+1)+(3b+1)+3c=3(a+b+1).$$

Šī summa dalās ar 3.

43.10. Nē, nevar. Pieņemsim pretējo, ka to var izdarīt. Visu izrakstīto skaitļu summa ir 136. Sadalīsim pirmos 15 izrakstītos skaitļus piecās grupās pa trim pēc kārtas ņemtiem. Katrā šādā grupā skaitļu summa nepārsniedz 24; tātad pirmo 15 izrakstīto skaitļu summa nepārsniedz $5 \cdot 24 = 120$. Tā kā visu izrakstīto skaitļu summai jābūt 136, tad pēdējais skaitlis ir ne mazāks par $136 - 120 = 16$; tātad tas ir skaitlis 16.

Aplūkojot pēdējos 15 skaitļus, līdzīgi pierāda, ka arī pirmais skaitlis ir 16. Iegūta pretruna.

43.11. a) Jā, var; piemēram, 125, 368, 479.

b) Jā, var; piemēram, 123, 456, 789.

c) Nē, nevar. Visu trīs skaitļu ciparu summu summa ir 45. Ja izpildās uzdevuma nosacījumi, tad pirmo divu skaitļu ciparu summas dalās ar 3, bet trešā skaitļa ciparu summa nedalās ar 3. Tas nozīmē, ka visu trīs skaitļu ciparu summu summa nedalās ar 3, bet 45 ar 3 dalās.

43.12. Vispirms pierāda formulu $2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n \cdot (n+1)$.

No nevienādībām

$$199 \cdot 200 = 39800 < 39860 = 2 \cdot 19930 < 40200 = 200 \cdot 201$$

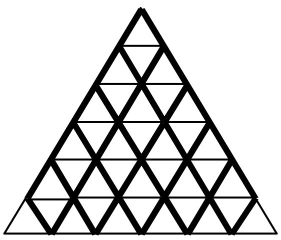
seko, ka mazākais nepieciešamais naturālo skaitļu daudzums ir 200.

43.13. Jā, to var izdarīt, piemēram, kā parādīts 43.10. zīmējumā.

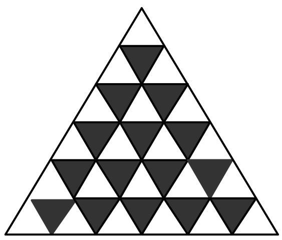
-1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	1
-1	-1	1	-1	-1

43.10. zīm.

43.14. Tā kā no katra 43.11. zīm. attēlotā "dubulttrijstūrīša" jāizgriež vismaz viena rūtiņa, tad jāiekrāso vismaz 15 rūtiņas. 43.12. zīmējumā parādīts, ka ar 15 rūtiņu iekrāsošanu pietiek.



43.11. zīm.



43.12. zīm.

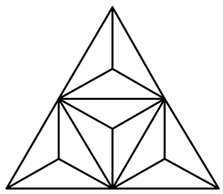
43.15. Atliekam vienu monētu malā, bet atlikušās 1992 monētas sadalām 4 grupās *A*, *B*, *C*, *D* pa 498 monētām katrā. Pirmajā svēršanas reizē uz viena svaru kausa noliekam grupas *A* un *B*, bet uz otras grupas *C* un *D*.

1) Ja kausi atrodas līdzsvarā, tad malā atliktā monēta ir viltota, un uz katra svaru kausa atrodas tieši viena viltotā monēta. Salīdzinot grupas *A* un *B* , noskaidrojam to grupu, kurā visas monētas ir īstas (tā ir smagākā grupa).

2) Ja grupa *A* un *B* pārsver grupu *C* un *D*, tad grupās *A* un *B* ir ne vairāk par vienu viltotu monētu. Salīdzinot grupas *A* un *B* , noskaidrojam to grupu, kurā visas monētas ir īstas (tā ir smagākā grupa).

43.16. Dotie skaitļi ir vienādi ar $2^{16}, 2^8, 2^8$; tātad, pirmais ir lielākais, bet otrais un trešais ir vienādi.

43.17. Jā, to var izdarīt, piemēram, tā kā parādīts 43.13. zīmējumā.



43.13. zim.

43.18. Pareizināsim otro vienādojumu ar *z* un atņemsim pirmo, pareizinātu ar *t*.

$$z \cdot (xt + 2yz) - t \cdot (xz - yt) = z - t \quad \Leftrightarrow y \cdot \left(2z^2 + t^2\right) = z - t\,.$$

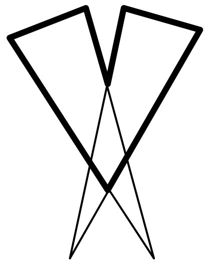
Taču dots, ka neviens no skaitļiem nav 0, un tāpēc

$$\left|y \cdot \left(2z^2 + t^2\right)\right| \geq 2z^2 + t^2 > |z - t|\,.$$

Tātad šādi veseli skaitļi neeksistē.

43.19. a) Nē, nevar būt. Ja sešstūrim visi 6 iekšējie leņķi būtu šauri, tad to summa būtu mazāka par $6 \cdot 90° = 540°$, bet tai jābūt $180° \cdot (6 - 2) = 720°$.

b) Jā, tā var būt. Sešstūris, kas parādīts 43.14. zīmējumā, apmierina uzdevuma nosacījumus. Tas iegūts, krustojot divus vienādsānu šaurleņķu trijstūrus.



43.13. zīm.

43.20. Skaitļus kārtosim augoša secībā pēc kārtas. Vieninieks jau atrodas kādā noteiktā vietā. Pieņemsim, ka skaitļi 1, 2, … , *k* jau sakārtoti pēc kārtas. Skaitlis $k+1$ arī atrodas noteiktā vietā . Tātad skaitļi pa riņķi izvietoti šādi:

1, 2, … , *k*, …, $k+1$, … . No skaitļa *k* līdz skaitlim $k+1$ neatrodas neviens skaitlis ar kuru nevarētu mainīties vietām skaitlis *k*. Tāpēc mēs viņu varam pārvietot blakus skaitlim $k+1$ un iegūt situāciju: 1, 2, …, $k-1$, … , *k*, $k+1$. Pēc tam pārvietojam skaitli $k-1$ blakus skaitlim *k*, utt.

Turpinot šo procesu, iegūstam prasīto sakārtojumu.

43.21. No dotā seko, ka $\frac{p^2}{4}-q<0$ un $p^2-2q=0$. No pirmās nevienādības seko, ka $q>0$. Iegūstam

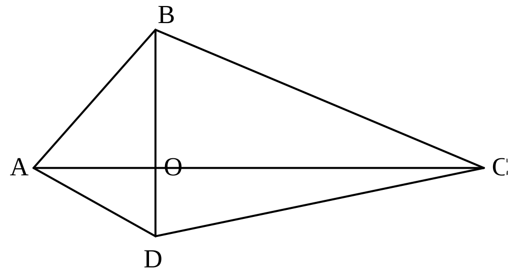
$$\left(\frac{3p}{2}\right)^2-3q=\frac{9}{4}\left(p^2-2q\right)+\frac{3}{2}q>0.$$

Tātad kvadrāttrinoma $x^2+3px+3q$ diskriminants ir pozitīvs, un aplūkojamam vienādojumam ir divas saknes.

43.22. Nē, nevar būt. Iegūto skaitļu summām jābūt vienādām zēniem un meitenēm. Bet dotos skaitļus nevar sadalīt divās grupās ar vienādām summām, jo visi skaitļi, izņemot vienu, dalās ar 3; tātad vienas grupas skaitļu summa dalīsies ar 3, bet otras -- nē, un summas nebūs vienādas.

43.23. Ievērosim, ka $x^2<x^2+x<(x+1)^2$. Tātad x^2+x nevar būt naturāla skaitļa *y* kvadrāts, jo atrodas starp diviem sekojošiem naturālu skaitļu kvadrātiem.

43.24. Pieņemsim, ka diagonāles ir perpendikulāras (skat. 43.1. zīm.).

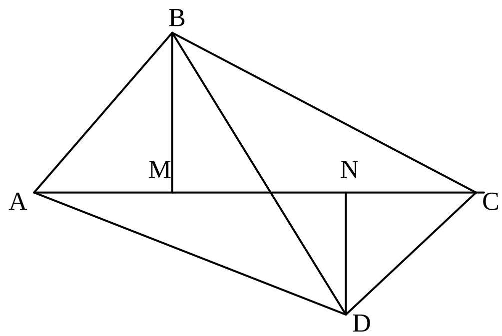


43.1. zīm.

Tad pēc Pitagora teorēmas

$$AB^2 + CD^2 = \left(AO^2 + OB^2\right) + \left(CO^2 + OD^2\right)$$
$$= \left(AO^2 + OD^2\right) + \left(BO^2 + OC^2\right) = AD^2 + BC^2.$$

Apgrieztais apgalvojums. Pieņemsim pretējo, ka $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$, bet diagonāles nav savstarpēji perpendikulāras (skat. 43.2. zīm.).



43.2. zīm.

Novilksim perpendikulus BM un DN pret diagonāli AC. Tā kā AC un BD nav perpendikulāri, tad $MN > 0$. Tad

$$AB^2 + CD^2 = AN^2 + MB^2 + CN^2 + ND^2, \text{ bet}$$
$$AD^2 + BC^2 = AN^2 + ND^2 + BM^2 + MC^2.$$

No šejienes seko, ka

$$AM^2 + CN^2 = AN^2 + CM^2.$$

Bet tā nevar būt, jo $AM < AN$ un $CN < CM$ (vai otrādi). Iegūta pretruna.

43.25. Ja nevienā komisijā nav vairāk par 8 deputātiem, tad jebkuram deputātam A, lai varētu būt kopā ar 64 citiem, jāpiedalās vismaz $\frac{64}{7} > 9$ komisiju darbā.

Ja ir kāda komisija K ar vismaz 9 deputātiem, tad aplūkosim deputātu Z, kas tajā neietilpst. Ar katru no 9 komisijas K deputātiem viņš sastopas kādā no komisijām; tātad viņš darbojas ne mazāk kā 9 komisijās.

43.26. No trijstūra nevienādības seko, ka $BC + CA > AB$. Tā kā $BC > CA$ (jo pret lielāku leņķi atrodas lielāka mala), tad $2BC > AB$, kas arī bija jāpierāda.

43.27. Tā kā $x^2 \geq 0$, tad dotais vienādojums ekvivalents apgalvojumam

$$x^2 = x - a \quad \text{vai} \quad x^2 = a - x \ .$$

Tātad uzrādītajiem vienādojumiem kopā jābūt trim saknēm. Tas iespējams trīs gadījumos:

1) Pirmajam vienādojumam ir divas saknes, otrajam -- viena, atšķirīga no pirmā vienādojuma saknēm. Tātad otrā vienādojuma $x^2 + x - a = 0$ diskriminants $D = 1 - 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$.

2) Otrajam vienādojumam ir divas saknes, pirmajam -- viena, atšķirīga no otrā vienādojuma saknēm. Līdzīgi iegūstam, ka $a = -\frac{1}{4}$.

3) Abiem vienādojumiem ir divas saknes, bet viena ir kopīga. Apzīmēsim kopīgo sakni ar *c*. Iegūstam divas vienādības

$$\begin{cases} c^2 = c - a \\ c^2 = a - c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c - a = a - c \quad \Rightarrow \quad c = a \ .$$

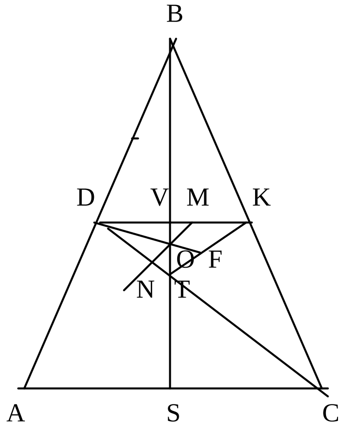
Ievietojot pirmajā vienādībā $c = a$, iegūstam $a^2 = a - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$.

Pārbaude parāda, ka visas trīs iegūtās *a* vērtības der.

43.28. Sadalām dārgakmeņus 8 kaudzītēs: $37 = 8' + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2$. Pārbaudām kaudzītes pēc kārtas, kamēr atrodam radioaktīvo elementu. Ja tas atrodas i-tajā kaudzītē, tad esam iztērējuši i dālderus un nevaram pārdot $9 - i$. Tātad, pārdodot visus pārējos dārgakmeņus, peļņa būs $(37 - (9 - i) + i) = 28$ dālderi.

Ja 7 kaudzītes pārbaudītas un radioaktīvu dārgakmeņu nav, tad peļņa būs $35 - 7 = 28$ dālderi.

43.29. Apzīmējam $\angle ABS = \alpha$; tad arī $\angle MDO = \alpha$ kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām (skat. 43. 3. zīm.).



43.3. zīm.

T ir trijstūra ABC mediānu krustpunkts. Tāpēc $\frac{DM}{BT} = \frac{\frac{2}{3}DF}{\frac{2}{3}BS} = \frac{DK}{BS} = \frac{AS}{BS} = \operatorname{tg}\alpha$. Tā kā arī $\frac{OD}{OB} = \operatorname{tg}\alpha$, tad trijstūri MDO un TDB ir līdzīgi; tātad $\angle DMO = \angle DTO$. No šejienes seko, ka $\angle TNO = \angle OVM = 90°$.

43.30. Izvēlēsimies skaitļus, kas dalās ar 2 vai 3. Šādu skaitļu ir

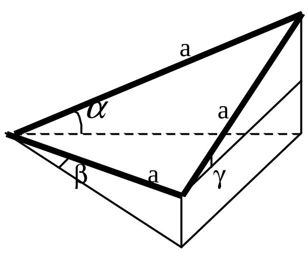
$$\left[\frac{1993}{2}\right] + \left[\frac{1993}{3}\right] - \left[\frac{1993}{6}\right] = 1328.$$

Starp jebkuriem trim no tiem būs vai nu divi, kas dalās ar 2, vai divi, kas dalās ar 3.

43.31. Sistēmai var būt 0, 1 vai 2 atrisinājumi. Pirmā vienādojumu atrisinājumu kopa plaknē ir riņķa līnija. Otrā vienādojuma atrisinājumu kopa ir taisne. Taisnei un riņķa līnijai var būt 0, 1 vai 2 kopīgi punkti.

43.32. Novelkam caur plaknei π tuvāko virsotni plakni π_1, kas paralēla π. Leņķi ar plakni π_1 ir tādi paši kā ar plakni π.

Tālākās virsotnes "augstums" virs π_1 ir $a \sin\alpha$ (skat. 43.4. zīm.)



43.4. zīm.

Tas sastāv no diviem nogriežņiem, kuru garumi ir $a\sin\beta$ un $a\sin\gamma$. Tātad $\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma$.

43.33. Izdalot skaitli *n* ar tā dalītāju, iegūstam skaitļa *n* dalītāju; vēl vairāk, izdalot *n* pēc kārtas ar visiem tā dalītājiem, mēs iegūstam visus *n* dalītājus.
Pareizinot doto vienādību ar $\sqrt{n}$, iegūstam

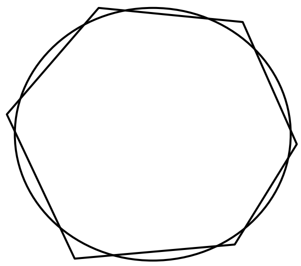
$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = \frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \cdots + \frac{n}{d_k}.$$

Šī vienādība, protams, ir pareiza, jo abās tās pusēs uzrakstīta visu skaitļa *n* dalītāju summa.

43.34. Pieskaitot dotajām nevienādībām vieninieku, iegūsim nevienādības

$$(a-1)^2 \le b^2 \le (a+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad |a-1| \le b \le |a+1| \quad \Rightarrow \quad |b-1| \le a \le |b+1| \quad \Rightarrow$$
$$(b-1)^2 \le a^2 \le (b+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - 2b \le a^2 - 1 \le b^2 + b.$$

43.35. Aplūkosim 43.5. zīmējumu.



43.5. zīm.

Apzīmēsim sešstūra malas garumu ar *a*, bet nogriežņu garumus pēc kārtas ar $b_1, z_1, s_1, \ldots, b_6, z_6, s_6$. Katrai sešstūra virsotnei uzrakstīsim formulu par sekantes un tās ārējās daļas reizinājumu:

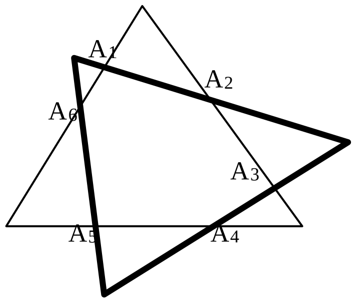
$$b_1(a-a_1) = a_6(a-b_6)$$
$$b_2(a-a_2) = a_1(a-b_1)$$
$$\ldots$$
$$b_6(a-a_6) = a_5(a-b_5).$$

Saskaitot šīs vienādības, savelkot līdzīgos locekļus un saīsinot ar *a* iegūstam

$$b_1 + \cdots + b_6 = a_1 + \cdots + a_6.$$

43.36. Vienādojumu var pārveidot formā $\sin 65x \cdot \sin 26x = 0$; no kurienes $x = \frac{\pi n}{65}$, $x = \frac{\pi n}{26}$. Pirmā sērija dod 130 atrisinājumus, otrā -- 52 atrisinājumus; starp tiem ir 26 sakrītoši. Tātad meklējamais atrisinājumu skaits ir $130 + 52 - 26 = 156$.

43.37. Visi trijstūri, kas atrodas ārpus iekšējā sešstūra ir līdzīgi (tas seko no atbilstošo leņķu vienādības). Skat. 43.6. zīm.



43.6. zīm.

Trīs trijstūru, kuru divas malas ir sarkanās (zīmējumā tumšākās), laukumu summa ir vienāda ar pārējo trijstūru laukumu summu. Atliek atzīmēt, ka līdzīgu trijstūru laukumi proporcionāli atbilstošo malu kvadrātiem; tātad

$$(A_1A_2)^2+(A_3A_4)^2+(A_5A_6)^2=(A_2A_3)^2+(A_4A_5)^2+(A_6A_1)^2 .$$

43.38. Ja $0\le x\le y\le z\le 1$, tad

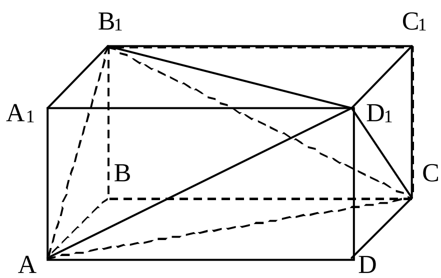
$$1-S=\left(1-z^3\right)+x^2(y-x)+y^2(z-y)+z^2x\ge 0.$$

Ja $0\le y\le x\le z\le 1$, tad

$$1-S=\left(1-z^3\right)+x\left(z^2-x^2\right)+y\left(x^2-y^2\right)+y^2z\ge 0.$$

Citi gadījumi reducējas uz vienu no apskatītajiem. Tātad $S\le 1$. Ja, piemēram, $x=1$ un $y=z=0$, tad $S = 1$. Tātad meklējamais minimums ir 1.

43.39. . Aplūkosim 43.7. zīm.



43.7. zīm.

No taisnstūru ABB_1A_1 un DCC_1D_1 vienādības seko, ka to diagonāles AB_1 un CD_1 ir vienādas. Līdzīgi pamato vienādību $AD_1=CB_1$.

Tātad trijstūri AD_1B_1 un CB_1D_1 ir vienādi (viena mala kopīga, pārējās atbilstoši vienādas). No šejienes seko, ka $\angle D_1AB_1=\angle D_1CB_1$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle D_1AC=\angle D_1B_1C$ un $\angle CAB_1=\angle CD_1B_1$.

Tātad leņķu lielumu summa, kurus veido diagonāles, kas iziet no virsotnes *A*, ir vienāda ar trijstūra CB_1D_1 iekšējo leņķu summu, t.i. ar $180°$.

43.40. Ja ir 3*n* vienas krāsas zīmuļi, tad visiem bērniem var uzdāvināt pa trim vienas krāsas zīmuļiem. Pretējā gadījumā, katras krāsas zīmuļu ir ne vairāk kā $3n-1$; tātad divu krāsu zīmuļu ir ne vairāk kā $6n-2$. Tas nozīmē, ka katras krāsas zīmuļi ir ne mazāk kā $(7n-2)-(6n-2)=n$; tātad katram bērnam var iedot triju dažādu krāsu zīmuļus.