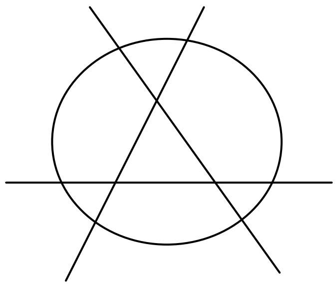
Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 43. OLIMPIĀDE

5. klase

3.1. Dota 96 cm gara taisnstūrveida papīta sloksnīte; tās platums nav zināms. Kā bez mērinstrumentiem var nogriezt no tās 45 cm garu gabalu?

3.2. Četras taisnes, krustojot riņķi, sadala to 7 daļās (skat. 43.1. zīm.).



43.1. zīm.

Vai var tajās ierakstīt skaitļus no 1 līdz 7 (dažādās daļās -- dažādus skaitļus) tā, lai katrai taisnei abās pusēs uzrakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati?

43.3. Cik ciparu ir skaitļu 36 812 439 un 58 937 402 reizinājumā? Ar kādu ciparu tas sākas, ar kādu -- beidzas?

43.4. Cik dažādu krustpunktu var būt 6 taisnes nogriežņiem? Uzrādiet visas iespējas un pierādiet, ka citu bez uzrādītajām nav.

43.5. Pa rūtiņu lapas līnijām uzzīmēta noslēgta līnija, kas ne caur vienu punktu neiet vairāk kā 1 reizi. Vai tai var būt tieši

a) 10 stūri,

b) 11 stūri,

c) 1000 stūri.

6. klase

43.6. Atrast kaut vienu tādu skaitli, kura veselās daļas un daļveida daļas reizinājums ir 1993.

Cik pavisam ir tādu skaitļu?

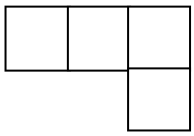
Par skaitļa x veselo daļu (apzīmē $[x]$) sauc lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.
Par skaitļa x daļveida daļu (apzīmē $\{x\}$) sauc skaitli $x-[x]$.

43.7. Vai no figūrām, kāda parādīta 43.2. zīm. var salikt

a) taisnstūri ar izmēriem 5×10,

b) taisnstūri ar izmēriem 3×8 ?

Figūras var būt novietotas arī citādi.



43.2. zīm.

43.8. Izrakstām ar zilu tinti rindā augošā kārtībā visus naturālos skaitļus, kas dalās ar 9. Zem katra skaitļa ar sarkanu tinti uzrakstām tā ciparu summu.

Vai "sarkanajā rindā" ātrāk parādīsies skaitlis 45 vai piecas reizes pēc kārtas uzrakstīts skaitlis 36 ?

43.9. Vai kuba šķautnes var sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katru šķautni -- ar citu skaitli) tā, lai katru tādu triju šķautņu numuru summa, kuras iziet no vienas virsotnes, dalītos ar 3?

43.10. Vai var izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 16 ieskaitot rindā tādā kārtībā, lai katru triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nepārsniegtu 24 ?

7. klase

43.11. No nenulles cipariem, katru izmantojot tieši 1 reizi, jāizveido triju trīsciparu skaitļu decimālie pieraksti. Vai var gadīties tā, ka

a) neviens no tiem nedalās ar 3,

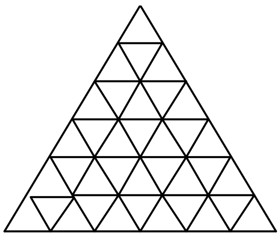
b) tie visi dalās ar 3,

c) divi no tiem dalās ar 3, bet trešais -- nē?

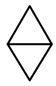
43.12. Kāds mazākais daudzums pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu, sākot ar 1, jāsaskaita, lai iegūtā summa pārsniegtu 19930 ?

43.13. Tabula sastāv no 3×5 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt "+1" vai "-1" tā, lai katrs ierakstītais skaitlis būtu vienāds ar visu savu kaimiņu reizinājumu?
(Divus skaitļus sauc par kaimiņiem, ja tie ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu.) Visi ierakstītie skaitļi nedrīkst būt vienādi.

43.14. Kādu mazāko daudzumu mazo trijstūrīšu jāiekrāso 43.3. zīmējumā attēlotajā lielajā trijstūrī, lai katrs "dubulttrijstūris" (skat. 43.4. zīm.) saturētu vismaz vienu iekrāsotu trijstūrīti?



43. 3. zīm.



43.4. zīm.

43.15. Dotas 1993 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 1990 ir īstas (visas ar vienādu masu), bet 3 -- viltotas (arī visas ar vienādu masu, kas mazāka par īstās monētas svaru). Kā ar 2 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast 498 īstās monētas?

8. klase

43.16. Sakārtot pēc lieluma skaitļus $2^{2^{2^2}}$; $\left(2^2\right)^{2^2}$; $\left(2^{2^2}\right)^2$.

43.17. Vai vienādmalu trijstūri var sagriezt 12 vienādos trijstūros?

43.18. Vai pastāv tādi veseli skaitļi *x*, *y*, *z* un *t*, starp kuriem neviens nav 0, ka abas vienādības

$$xz - yt = 1 \quad \text{un} \quad xt + 2yz = 1$$

ir pareizas.

43.19. Vai sešstūrim var būt tieši

a) seši,

b) pieci

šauri leņķi.

43.20. Pa apli kaut kādā kārtībā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 1993 ieskaitot (katrs vienu reizi). Divus blakus uzrakstītus skaitļus drīkst mainīt vietām, ja tie atšķiras vairāk nekā par 1.

Pierādiet, ka skaitļus var pārkārtot tā, lai, ejot pa riņķi no kādas vietas, tie atrastos augošā secībā no 1 līdz 1993.

9. klase

43.21. Vienādojumam $x^2 + px + q = 0$ sakņu nav, bet vienādojumam $x^2 + 2px + 2q = 0$ ir viena sakne.

Cik sakņu var būt vienādojumam $x^2 + 3px + 3q = 0$?

43.22. Klases vakarā piedalījās 8 zēni un 8 meitenes. Katrs zēns saskaitīja, ar cik meitenēm viņš dejoja šajā vakarā, un katra meitene saskaitīja, ar cik zēniem viņa dejoja šajā vakarā. Vai iegūtie skaitļi var būt

3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6 ?

43.23. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x^2 + x = y^2 .$$

43.24. Pierādīt, ka izliektā četrstūrī *ABCD* diagonāles *AC* un *BD* ir savstarpēji perpendikulāras tad un tikai tad, kad

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 .$$

43.25. Parlamentā ir 65 deputāti. Parlamentā nodibinātas vairākas komisijas. Nevienā komisijā nedarbojas visi deputāti. Katriem diviem deputātiem var atrast tieši vienu komisiju, kurā viņi abi darbojas.

Pierādīt, ka ir vismaz viens tāds deputāts, kurš darbojas ne mazāk kā 9 komisijās.

10. klase

43.26. Trijstūrī *ABC* leņķis *A* ir lielāks par leņķi *B*. Pierādīt, ka

$$BC > \frac{AB}{2} .$$

43.27. Kādām *a* vērtībām vienādojumam

$$x^2 = |x - a|$$

ir tieši trīs dažādas saknes?

43.28. Mūsu rīcībā ir 37 dārgakmeņi, tieši viens no tiem ir radioaktīvs, bet mēs nezinām, kurš. Katru ne radioaktīvu dārgakmeni var pārdot par vienu dālderi. Ar vienu pārbaudi par jebkuru dārgakmeņu kaudzīti var uzzināt, vai tajā ir vai nav radioaktīvs dārgakmens, bet, ja tāds ir, tad visi pārbaudītās kaudzītes dārgakmeņi kļūst radioaktīvi; bez tam viena pārbaude arī izmaksā 1 dālderi. Piedāvāt pārdošanai radioaktīvus dārgakmeņus nedrīkst.

Izstrādājiet metodi, kas ļauj mums nopelnīt vismaz 28 dālderus.

43.29. Vienādsānu šaurleņķa trijstūrī ABC zināms, ka $AB = BC$; D ir AB viduspunkts, O ir ap ABC apvilktās riņķa līnijas centrs; M ir trijstūra DBC mediānu krustpunkts.

Pierādīt, ka MO ir perpendikulārs CD.

43.30. No naturāliem skaitļiem, kas nepārsniedz 1993, izvelieties 1328 skaitļus tā, lai starp jebkuriem trim izvēlētajiem būtu vismaz divi, kuru lielākais kopīgais dalītājs pārsniedz vieninieku.

Pietiek uzrādīt vienu šādu 1328 skaitļu komplektu.

11. klase

43. 31. Cik atrisinājumu var būt vienādojumu sistēmai

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ ax + by = 1 \end{cases}$$

atkarībā no parametru a un b vērtībām?

43.32. Regulārs trijstūris atrodas vienā pusē no plaknes π; tā malas veido ar plakni leņķus α, β un γ; pie tam $\alpha > \beta$ un $\alpha > \gamma$.

Pierādīt, ka

$$\sin\alpha = \sin\beta + \sin\gamma .$$

43.33. Naturāla skaitļa n visi pozitīvie dalītāji ir $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Pierādiet, ka

$$\frac{d_1}{\sqrt{n}} + \frac{d_2}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{d_k}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{d_1} + \frac{\sqrt{n}}{d_2} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{d_k} .$$

43.34. Zināms, ka $a^2 - 2a \le b^2 - 1 \le a^2 + 2a$.

Pierādīt, ka $b^2 - 2b \le a^2 - 1 \le b^2 + 2b$,

ja a un b -- pozitīvi skaitļi, kas lielāki par 1.

43.35. Izliektam sešstūrim visas malas ir vienādi garas. Riņķa līnija krusto katru malu iekšējos punktos. Tādejādi sešstūra malas sadalās 18 nogriežņos. Nokrāsojam tos, sākot no vienas virsotnes, pēc kārtas trīs krāsās: balts, zaļš, sarkans, balts, zaļš, sarkans, … , balts, zaļš, sarkans.
Pierādīt, ka visu balto nogriežņu garumu summa vienāda ar visu sarkano nogriežņu summu.

12. klase

43.36. Cik atrisinājumu, kas apmierina nosacījumu $0 \le x < \pi$ ir vienādojumam

$$\cos 91x = \cos 39x .$$

43.37. Divi vienādi regulāri trijstūri novietoti tā, ka to kopējā daļa ir sešstūris. Viena trijstūra malas ir baltas, otra -- sarkanas. Pierādīt, ka sešstūra balto malu garumu kvadrātu summa ir vienāda ar sešstūra sarkano malu garumu kvadrātu summu.

43.38. Dots, ka $0 \le x,\ y,\ z \le 1$. Atrast izteiksmes

$$S = x^3 + y^3 + z^3 - x^2 y - y^2 z - z^2 x$$

lielāko iespējamo vērtību.

43.39. No vienas taisnstūra paralēlskaldņa virsotnes novilktas triju skaldņu diagonāles. Pierādiet, ka to triju leņķu lielumu summa, kurus veido šīs diagonāles, ir $180°$.

43.40. Pavisam ir $7n - 2$ vairāku krāsu zīmuļi, n -- naturāls skaitlis. Pierādīt, ka katram no n bērniem var uzdāvināt pa 3 zīmuļiem tā, lai vai nu visi $3n$ uzdāvinātie zīmuļi būtu vienas un tās pašas krāsas, vai arī katrs bērns saņemtu triju dažādu krāsu zīmuļus.