Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 44. OLIMPIĀDE

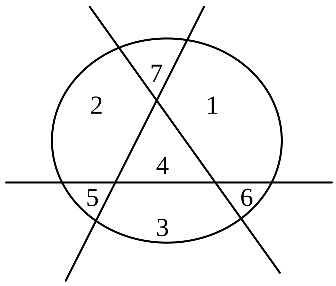
ATRISINĀJUMI

44.1. Skat., piemēram, 44.4. zīm.

X	X				
	X	X			
		X	X		
			X	X	
				X	X
X					X

44.4. zīm.

44.2. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 44.5. zīmējumā.



44.5. zīm.

44.3. Nē. Sākotnējā skaitļa pēdējais cipars bija pāra cipars, tātad vismaz 2. Bet, reizinot iegūto četrciparu skaitli ar 6 (tā pirmais cipars ir lielāks vai vienāds ar 2), iznāk piecciparu skaitlis.

44.4. Pārdevējs šajā notikumā zaudēja 10 latus, kurus tam bija jāatdod kaimiņam viltoto 10 latu vietā.

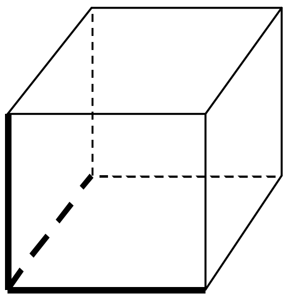
44.5. Nē, tā nevar būt. Kopējais monētu maiņu skaits ir $11 \cdot 7 = 77$. Katrā maiņā tiek mainītas 3 monētas, bet 77 ar 3 nedalās.

44.6. To var izdarīt šādi:

a) $173173173 = 173 \cdot 1001001$,

b) $173173173 = 173 \cdot 3 \cdot 333667$.

44.7. Jā, var. Visas šķautnes var iedalīt trīs virzienu grupās (no katras virsotnes iziet pa vienam nogrieznim katrā virzienā; skat. 44.6. zīm.)



44.6. zīm.

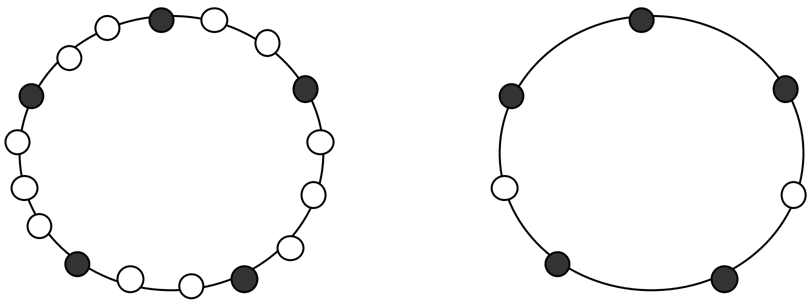
Visas pirmajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 1, 4, 7, 10 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 1; tos var pierakstīt kā $3a+1$). Visas otrajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 2, 5, 8, 11 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 2; tos var pierakstīt kā $3b+2$). Visas trešajā virzienā ejošās virsotnes numurēsim ar skaitļiem 3, 6, 9, 12 (šie skaitļi, dalot ar 3, dod atlikumā 0; tos var pierakstīt kā $3c$). Tad katrā virsotnē ieejošo šķautņu numuru summa ir

$$(3a+1)+(3b+1)+3c=3(a+b+1).$$

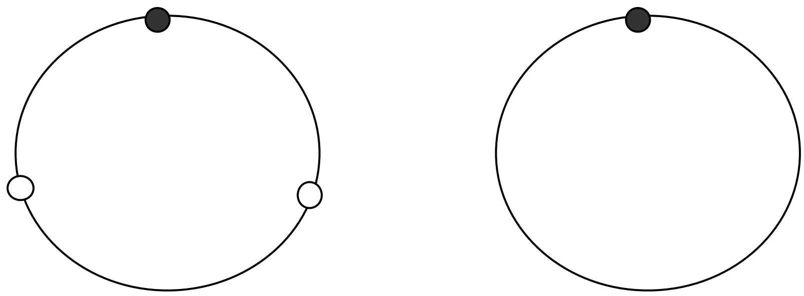
Šī summa dalās ar 3.

44.8. Var pārbaudīt, ka der, piemēram, skaitlis $a=0{,}49$.

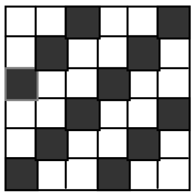
44.9. Figūriņas var izvietot, piemēram, tā kā parādīts 44.7. zīmējumā. Tālāk parādīts, kādā secībā figūras 3 gājienos tiek noņemtas.



44.7. zīm.



44.10. Viegli pārbaudīt, ka katrā taisnstūrī 2×3 ir jānokrāso vismaz 2 rūtiņas (citādi tajā varēs ievietot norādīto figūru, kas būs pilnīgi balta). Tā kā doto kvadrātu var sadalīt 6 šādos taisnstūros, tad jānokrāso vismaz $6 \cdot 2$ rūtiņas. Kā redzams 44.8. zīmējumā, nokrāsojot 12 rūtiņas, var panākt prasīto.



44.8. zīm.

44.11. a) Jā, piemēram, $(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5=0$.

b) Nē, jo no 10 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem pieci ir pāra skaitļi un pieci -- nepāra. Šo skaitļu summa būs nepāra skaitlis; tātad nebūs nulle.

44.12. Jā, to var izdarīt, piemēram, kā parādīts 44.9. zīmējumā.

-1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	1
-1	-1	1	-1	-1

44.9. zīm.

44.13. Jā, tādi skaitļi eksistē. Mazākais no šādiem skaitļiem ir $198\underbrace{99\ldots9}_{17 \text{ reizes}}$.

Tiešām, skaitļa $198\underbrace{99\ldots9}_{17 \text{ reizes}}$ ciparu summa ir $9 \cdot 19$, bet tam sekojošā skaitļa $199\underbrace{00\ldots0}_{17 \text{ nulles}}$ ciparu summa ir 19.

44.14. Katrs rūķītis sēdēs mājās tieši divas dienas:

pirmais -- dienās ar numuriem 1. un 2.;

otrais -- dienās ar numuriem 1. un 3.;

trešais -- dienās ar numuriem 1. un 4.;

ceturtais -- dienās ar numuriem 1. un 5.;

piektais -- dienās ar numuriem 2. un 3.;

sestais -- dienās ar numuriem 2. un 4.;

septītais -- dienās ar numuriem 2. un 5.;

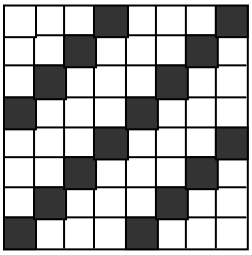
astotais -- dienās ar numuriem 3. un 4.;

devītais -- dienās ar numuriem 3. un 5.;

desmitais -- dienās ar numuriem 4. un 5.;

Tā kā neviens no dienu numuru pāriem nesakrīt, tad katrs rūķītis apciemos katru.

44. 15. Viegli pārbaudīt, ka katrā taisnstūrī 2×4 ir jānokrāso vismaz 2 rūtiņas (citādi tajā varēs ievietot norādīto figūru, kas būs pilnīgi balta). Tā kā doto kvadrātu var sadalīt 8 šādos taisnstūros, tad jānokrāso vismaz $8 \cdot 2 = 16$ rūtiņas. Kā redzams 44.10. zīmējumā, nokrāsojot 16 rūtiņas, var panākt prasīto.



44.10. zīm.

44.16. Abos gadījumos grupējam saskaitāmos pa trim pēc kārtas:

$(1+2+3)+(4+5+6)+\cdots+(28+29+30)$;

$(1+2+3)+(4+5+6)+\cdots+(1990+1991+1992)+(1993+1994)$.

Katrā grupā no trim skaitļiem summa dalās ar 3. Tiešām

$n+(n+1)+(n+2)=3n+3=3\cdot(n+1)$.

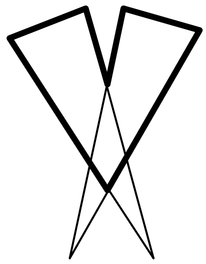
Ievērosim, ka arī $1993+1994$ dalās ar 3. Tāpēc abos gadījumos skaitļu summas, dalot ar 3, dod atlikumā 0.

44.17. Ievērosim, ka vienādojumam $ax = b$ nav atrisinājumu tad un tikai tad, kad $a = 0$ un $b \neq 0$. Tātad mums jāizvēlas 5 skaitļi tā, lai veidotos tieši divi norādītā veida vienādojumi. To var izdarīt, piemēram, šādi:

$a = c = e = 1, \quad b = d = 0$.

44.18. a) Nē, nevar būt. Ja sešstūrim visi 6 iekšējie leņķi būtu šauri, tad to summa būtu mazāka par $6\cdot 90° = 540°$, tai jābūt $180°\cdot(6-2) = 720°$.

b) Jā, tā var būt. Sešstūris, kas parādīts 44.11. zīmējumā, apmierina uzdevuma nosacījumus. Tas iegūts, krustojot divus vienādsānu šaurleņķu trijstūrus.



44.11. zīm.

44.19. Ja katrs no konferences dalībniekiem pazīst katru, tad var izvēlēties jebkurus 4 cilvēkus. Pieņemsim, ka *A* un *B* viens otru nepazīst. Viņiem kopā ir vismaz 10 paziņas starp atlikušajiem 8 cilvēkiem. Tātad viņiem ir vismaz divi kopēji paziņas *X* un *Y*. Tad var pie apaļa galda nosēdināt 4 cilvēkus kārtībā A, X, B, Y.

44.20. a) Pietiek ar 7 punktiem. Tos var pēc kārtas patvaļīgi zīmēt plaknē tā, lai izpildītos vienādības $AB = 1,\ BC = 2,\ CD = 4,\ DE = 8,\ EF = 16,\ FG = 32$.

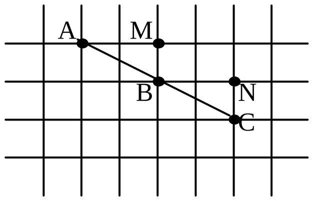
b) Pierādīsim, ka ar mazāk punktiem nepietiek. Pieņemsim, ka kāda punktu sistēma no mazāk nekā 7 punktiem apmierina uzdevuma nosacījumus. Novilksim tajā pa vienam katra norādītā garuma nogriežņus. Tā kā katrs no skaitļiem lielāks par visu to skaitļu summu, kas mazāki par to, tad nekādi novilktie nogriežņi neveido slēgtu lauztu līniju (jāizmanto teorēma par lauztas līnijas garumu!). Bet, ja *n* vai mazāk punktu sistēmā novelkam *n* nogriežņus ar galapunktiem atzīmētajos punktos, noteikti veidojas slēgta lauzta līnija. Iegūta pretruna.

44.21. Ievērosim, ka
$$2x^2 - 2x\cdot(a+b) + (a^2+b^2) = (x^2 - 2ax + a^2) + (x^2 - 2bx + b^2) = (x-a)^2 + (x-b)^2.$$

Tāpēc doto vienādojumu var pārveidot formā
$$(x-a)^2 + (x-b)^2 = 0.$$

Divu skaitļu kvadrātu summa ir 0 tikai, ja abi šie skaitļi ir nulles. Tātad, ja *x* ir dotā vienādojuma sakne, jābūt $x = a$ un $x = b$; bet tas nozīmē, ka $a = b$; pretruna ar uzdevuma nosacījumu. Vienādojumam sakņu nav.

44.22. Skat. 44.4. zīm.



44.4. zīm.

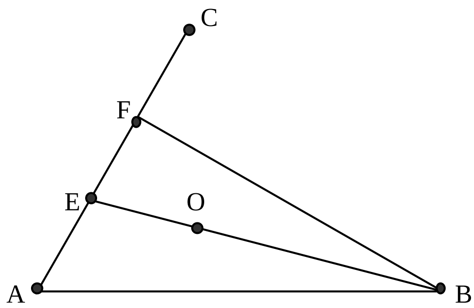
Novilksim nogriežņus *AB* un *BC*. Tā kā trijstūri *AMB* un *BNC* ir vienādi (kā taisnleņķa trijstūri ar atbilstoši vienādām katetēm., tad

$\angle ABC = \angle ABM + \angle CBN + 90° = \angle ABM + \angle BAM + 90° = 90° + 90° = 180°$.

No šejienes seko prasītais.

44.23. Ievērosim, ka $x^2 < x^2 + x < (x+1)^2$. Tātad $x^2 + x$ nevar būt naturāla skaitļa *y* kvadrāts, jo atrodas starp diviem sekojošiem naturālu skaitļu kvadrātiem.

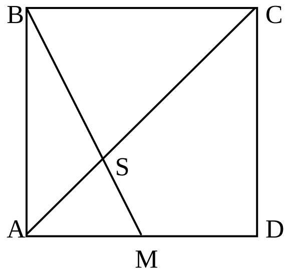
44.24. Pieņemsim, ka jāsadala uz pusēm nogrieznis *AB* (skat. 44.5. zīm.). Novelkam *AC*. Ar trisektoru atrodam punktus *E* un *F* tā, ka $AE = EF = FC$. Tad *E* ir *AF* viduspunkts. Ar trisektoru atrodam tādu punktu *O* uz *EB*, ka $EO = \frac{1}{3}EB$. Tad *O* ir trijstūra *AFB* mediānu krustpunkts, un taisne *FO* krustos nogriezni *AB* tā viduspunktā.



44.5. zīm.

44.25. Ievērosim, ka skaitļi 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 15 nedrīkst atrasties blakus, jo divu skaitļu starpība no šīs skaitļu grupas nevar pieņemt vērtību 4, 5, 6 vai 7. Tātad atstarpes starp šiem 8 skaitļiem jāaizpilda ar atlikušajiem 7 skaitļiem. Protams, ka tas nav iespējams.

44.26. Skat. 44.6. zīm.



44.6

Skaidrs, ka $S_{AMB} = \frac{1}{4}$. Trijstūri BSC un MSA ir līdzīgi, jo to atbilstošie leņķi ir vienādi. Tātad $\frac{BS}{SM} = \frac{BC}{AM} = 2$. Tā kā $SM = \frac{1}{3}BM$, tad $S_{ASM} = \frac{1}{3}S_{ABM} = \frac{1}{12}$. (Šo trijstūru augstumi ir vienādi, bet pamatu attiecība ir 1 : 3.)

46.27. Tā kā $x^2 \geq 0$, tad dotais vienādojums ekvivalents apgalvojumam

$x^2 = x - a$ vai $x^2 = a - x$.

Tātad uzrādītajiem vienādojumiem kopā jābūt trim saknēm. Tas iespējams trīs gadījumos:

1) Pirmajam vienādojumam ir divas saknes, otrajam -- viena, atšķirīga no pirmā vienādojuma saknēm. Tātad otrā vienādojuma $x^2 + x - a = 0$ diskriminants $D = 1 - 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}$.

2) Otrajam vienādojumam ir divas saknes, pirmajam -- viena, atšķirīga no otrā vienādojuma saknēm. Līdzīgi iegūstam, ka $a = -\frac{1}{4}$.

3) Abiem vienādojumiem ir divas saknes, bet viena ir kopīga. Apzīmēsim kopīgo sakni ar *c*. Iegūstam divas vienādības

$$\begin{cases} c^2 = c - a \\ c^2 = a - c \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c - a = a - c \quad \Rightarrow \quad c = a .$$

Ievietojot pirmajā vienādībā $c = a$, iegūstam $a^2 = a - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$.

Pārbaude parāda, ka visas trīs iegūtās *a* vērtības der.

44.28. To, ka skaitļi *a* un *b* veido pāri, apzīmēsim $a \leftrightarrow b$. Viegli pārbaudīt, ka ar skaitli 18 pārī var atrasties tikai skaitlis 7. Tiešām $18 + 1 > 4^2$, bet $18 + 17 < 6^2$; tātad atliek vienīgā iespēja $5^2 = 18 + 7$. Līdzīgi pamato, ka $17 \leftrightarrow 8$ un $16 \leftrightarrow 9$. Skaitlis 15 var veidot pārus ar skaitļiem 10 vai 1.

Ja $15 \leftrightarrow 10$, tad $6 \leftrightarrow 3$. Bet tādā gadījumā skaitlim 1 starp atlikušajiem skaitļiem

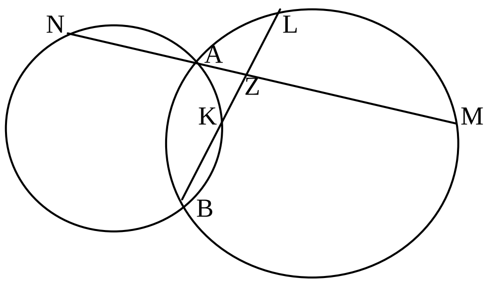
2, 4, 5, 11, 12, 13, 14 nav atbilstoša pāra.

Tas nozīmē, ka ir pāris $15 \leftrightarrow 1$. To, ka prasītais sadalījums tiešām iespējams, parāda piemērs: $1 \leftrightarrow 15,\ 2 \leftrightarrow 14,\ 3 \leftrightarrow 13,\ 4 \leftrightarrow 12,\ 5 \leftrightarrow 11,\ 6 \leftrightarrow 10,\ 7 \leftrightarrow 18,\ 8 \leftrightarrow 17,\ 9 \leftrightarrow 16$.

44.29. a) Aplūkojam vietu ar numuru 1. Ja tur stāv meitene, tad kādā no vietām ar numuriem no 2. līdz 11. stāv zēns (citādi meiteņu būtu vairāk par 10). Mainot šos bērnus vietām, pirmajā vietā atradīsies zēns. Tālāk aplūkojam vietu ar numuru 2.. Ja tur stāv meitene, tad kādā no vietām ar numuriem no 3. līdz 12. stāv zēns. Mainot šos bērnus vietām, otrajā vietā atradīsies zēns. Tā turpinot, nevairāk kā ar 10 maiņām iegūsim prasīto izvietojumu.

b) Ja pirmajās 10 vietās stāv meitenes, vajadzīgas vismaz 10 maiņas, jo vienas maiņas rezultātā ne vairāk kā viens zēns var nostāties savā vietā (pirmajā desmitniekā).

44.30. Skat. 44.7. zīm.



44.7. zīm.

No teorēmas par hordu reizinājumiem seko vienādības

$$ZL \cdot ZB = ZA \cdot ZM \quad \text{un} \quad ZK \cdot ZB = ZA \cdot ZN\,.$$

Ņemot vērā, ka $ZM = ZN$, iegūstam

$$ZL \cdot ZB = ZA \cdot ZM = ZA \cdot ZN = ZA \cdot ZB\,.$$

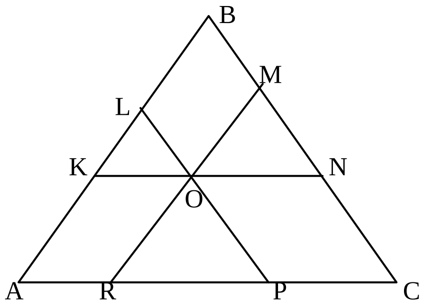
Izdalot vienādību ar *ZB*, iegūstam prasīto.

44.31. Pārveidojot, iegūstam:

$$y^8 - x^8 = \left(y^4 - x^4\right)\cdot\left(y^4 + x^4\right) = \left(y^2 - x^2\right)\cdot\left(y^2 + x^2\right)\cdot\left(y^4 + x^4\right) =$$
$$(y - x)\cdot(y + x)\cdot\left(y^2 + x^2\right)\cdot\left(y^4 + x^4\right) = (y + x)\cdot\left(y^2 + x^2\right)\cdot\left(y^4 + x^4\right).$$

Pēdējā pārveidojumā izmantojām to, ka $y - x = 1$.

44.32. Skat. zīm. 44.8.



44.8. zīm.

Apzīmēsim $\angle LOK = \angle NOP = \angle 1$, $\angle MON = \angle ROK = \angle 2$, $\angle ROP = \angle MOL = \angle 3$.
Izmantojot paralelograma un trijstūra laukuma formulas, iegūstam

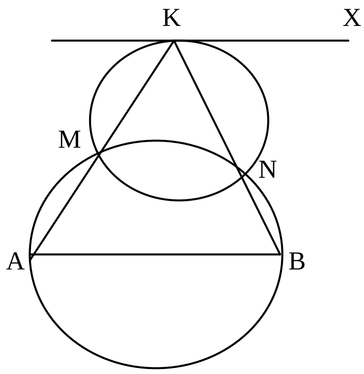
$$S_{AKOR} \cdot S_{BMOL} \cdot S_{CNOP} =$$
$$(OK \cdot OR \cdot \sin\angle 2) \cdot (OL \cdot OM \cdot \sin\angle 3) \cdot (ON \cdot OP \cdot \sin\angle 1) =$$
$$8 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot OK \cdot OL \cdot \sin\angle 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot OM \cdot ON \cdot \sin\angle 2\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot OP \cdot OR \cdot \sin\angle 3\right) =$$
$$8 \cdot S_{OKL} \cdot S_{OMN} \cdot S_{OPR} .$$

44.33. Izdalot skaitli n ar tā dalītāju, iegūstam skaitļa n dalītāju; vēl vairāk, izdalot n pēc kārtas ar visiem tā dalītājiem, mēs iegūstam visus n dalītājus.
Pareizinot doto vienādību ar $\sqrt{n}$, iegūstam

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_k = \frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \cdots + \frac{n}{d_k} .$$

Šī vienādība, protams, ir pareiza, jo abās tās pusēs uzrakstīta visu skaitļa n dalītāju summa.

44.34. Skat. 44.9. zīm.



44.9. zīm.

No hordas - pieskares leņķa un ievilktā leņķa īpašībām seko, ka $\angle XKN = \angle KMN$. No riņķī ievilkta četrstūra īpašībām seko, ka $\angle KMN = 180° - \angle AMN = \angle ABN$. Tātad $\angle XKN = \angle ABN$, no kurienes seko taišņu KX un AB paralelitāte.

44.35. Liekam sainīšus maisā katram no astoņiem Salavečiem tik ilgi, līdz to kopsvars pārsniedz 25 kg; tad pēdējo ielikto sainīti izņemam no maisa un atliekam malā. Kad esam beiguši šo procesu, vēl neaiztikto sainīšu kopsvars ir mazāks par $225 - 8 \cdot 25 = 25$ (kg); tos var aiznest devītais Salavecis. Malā atlikto sainīšu kopsvars nepārsniedz $3 \cdot 8 = 24$ (kg), tāpēc tos var aiznest desmitais Salavecis.

44.36. Tā kā funkcijas $\cos t$ vērtības pēc absolūtās vērtības nepārsniedz 1, tad dotā vienādība var izpildīties tikai, ja visi reizinātāji pēc absolūtās vērtības ir vienādi ar 1. Tas nozīmē, ka izpildās vienādība

$$|\cos x| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \cos^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = 0 \ .$$

Tātad, $x = \pi k, \quad k \in Z$. Pārbaude parāda, ka visas šīs x vērtības der.

44.37. Aplūkosim četrus gadījumus atkarībā no tā, kādus atlikumus dod skaitlis n, dalot ar 4.

1) $n = 4k$, k -- naturāls skaitlis. Tad

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[\frac{4k^2}{4}\right] = k^2 .$$

Ja $k > 1$, šis ir salikts skaitlis; tātad nav pirmskaitlis. Ja $k = 1$, tad iegūstam skaitli 1, kas arī nav pirmskaitlis.

2) $n = 4k + 1$, k -- vesels nenegatīvs skaitlis. Tad

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[\frac{(4k+1)^2}{4}\right] = \left[\frac{16k^2 + 8k + 1}{4}\right] = \left[4k^2 + 2k + \frac{1}{4}\right] = 4k^2 + 2k = 2 \cdot \left(2k^2 + k\right).$$

Ja $k \geq 1$, tad aplūkojamais skaitlis nav pirmskaitlis, jo sadalās divos reizinātājos 2 un $2k^2 + k$, kuri abi ir lielāki par 1. Ja $k = 0$, tad iegūstam skaitli 0, kas arī nav pirmskaitlis.

3) $n = 4k + 2$, k -- vesels nenegatīvs skaitlis. Tad

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[\frac{(4k+2)^2}{4}\right] = \left[\frac{16k^2 + 16k + 4}{4}\right] = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 .$$

Ja $k \geq 1$, tad aplūkojamais skaitlis ir salikts skaitlis. Ja $k = 0$, tad iegūstam skaitli 1, kas arī nav pirmskaitlis.

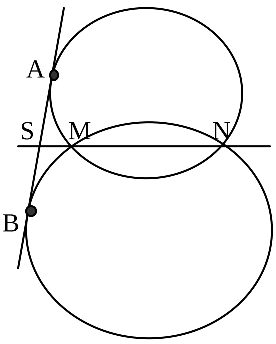
4) $n = 4k + 3$, k -- vesels nenegatīvs skaitlis. Tad

$$\left[\frac{n^2}{4}\right] = \left[\frac{(4k+3)^2}{4}\right] = \left[\frac{16k^2+24k+9}{4}\right] = \left[4k^2+6k+2+\frac{1}{4}\right] = 4k^2+6k+2.$$

Ja $k \geq 1$, tad aplūkojamais skaitlis nav pirmskaitlis, jo sadalās divos reizinātājos 2 un $2k^2+3k+1$, kuri abi ir lielāki par 1. Ja $k=0$, tad iegūstam pirmskaitli 2.

Atbilde: $n=3$.

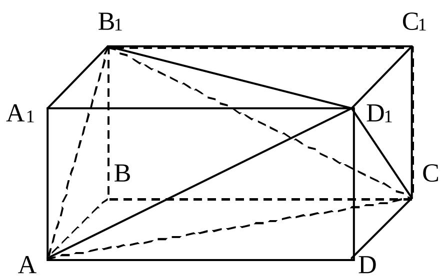
44.38. Skat. 44.10. zīm.



44.10. zīm.

Pieņemsim, ka taisne *MN* krusto kopējo pieskari *AB* punktā *S*. No teorēmas par hordu reizinājumu seko, ka $SA^2 = SM \cdot SN$ un $SB^2 = SM \cdot SN$; tātad $SA = SB$. Līdzīgi pierada, ka *MN* arī otru trapeces malu krusto tās viduspunktā; tātad *MN* ir aplūkojamās trapeces viduslīnija.

44.39. Aplūkosim 44.11. zīm.



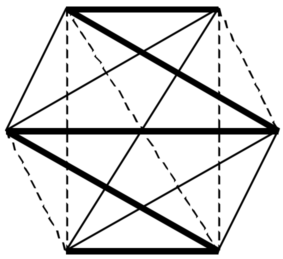
44.11. zīm.

No taisnstūru ABB_1A_1 un DCC_1D_1 vienādības seko, ka to diagonāles AB_1 un CD_1 ir vienādas. Līdzīgi pamato vienādību $AD_1 = CB_1$.

Tātad trijstūri AD_1B_1 un CB_1D_1 ir vienādi (viena mala kopīga, pārējās atbilstoši vienādas). No šejienes seko, ka $\angle D_1AB_1 = \angle D_1CB_1$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle D_1AC = \angle D_1B_1C$ un $\angle CAB_1 = \angle CD_1B_1$.

Tātad leņķu lielumu summa, kurus veido diagonāles, kas iziet no virsotnes *A*, ir vienāda ar trijstūra CB_1D_1 iekšējo leņķu summu, t.i. ar $180°$.

44.40. Daudzstūrim var būt 6 malas ("pareizs" krāsojums parādīts 44.12. zīm.).



44.12. zīm.

Pierādīsim, ka vairāk malu daudzstūrim nevar būt. Pieņemsim, ka daudzstūrim ir n virsotnes. Ja šie punkti būtu savienoti ar n vienas krāsas nogriežņiem, tad veidotos slēgts cikls. Tātad kopējais nogriežņu skaits nepārsniedz $3\cdot(n-1)$. No otras puses n punktus savieno $\frac{n(n-1)}{2}$ nogriežņi. Tāpēc jāizpildās nevienādībai

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 3\cdot(n-1) \quad \Leftrightarrow \quad n^2-7n+6\leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)\cdot(n-6)\leq 0\,,$$

no kuras seko, ka $n\leq 6$.