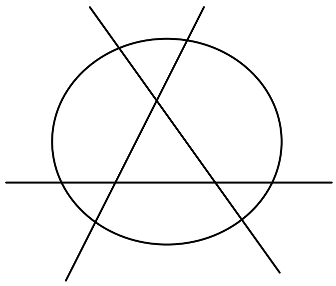
Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 44. OLIMPIĀDE

5. klase

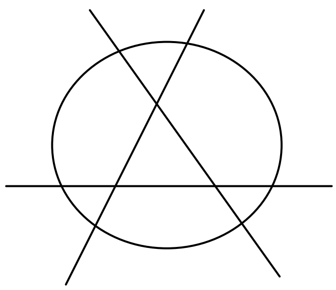
44.1. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Parādiet, ka dažās rūtiņās var iezīmēt pa krustiņam tā, lai katrā rindā un katrā kolonnā būtu tieši divi krustiņi. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

44.2. Četras taisnes, krustojot riņķi, sadala to 7 daļās (skat. 44.1. zīm.).



44.1. zīm.

Vai var tajās ierakstīt skaitļus no 1 līdz 7 (dažādās daļās -- dažādus skaitļus) tā, lai katrai taisnei abās pusēs uzrakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati? Četras taisnes, krustojot riņķi, sadala to 7 daļās (skat. 44.1. zīm.).



44.1. zīm.

Vai var tajās ierakstīt skaitļus no 1 līdz 7 (dažādās daļās -- dažādus skaitļus) tā, lai katrai taisnei abās pusēs uzrakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati?

44.3. Četrciparu skaitļa pēdējo ciparu pārcēla uz skaitļa sākumu. Iegūtais četrciparu skaitlis bija 6 reizes mazāks par sākotnējo. Vai tā var būt?

44.4. Pircējs pirka preci par 3 latiem un maksāja ar 10 latu naudas zīmi. Pārdevējam nebija maiņas naudas, tāpēc viņš vispirms samainīja šo naudas zīmi pie kaimiņa. Kad pircējs aizgāja, kaimiņš konstatēja, ka 10 latu naudas zīme ir viltota. Pārdevējs atdeva kaimiņam 10 latus un noskuma.
Cik naudas šajā notikumā zaudēja pārdevējs?

44.5. Kādā klasē mācās 11 skolnieki. Brīdi pa brīdim kāds no viņiem samaina 10 santīmus monētu pret divām 5 santīmu monētām ar kādu klases biedru. Citādas maiņas nenotiek.
Vai var gadīties, ka gada laikā katrs skolnieks šādās maiņās atdevis citiem tieši 7 monētas?

6. klase

44.6. Sadalīt skaitli 173173173

a) divos,

b) trijos naturālos reizinātājos, kas visi lielāki par 1.

44.7. Vai kuba šķautnes var sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katru šķautni -- ar citu skaitli) tā, lai katru tādu triju šķautņu numuru summa, kuras iziet no vienas virsotnes, dalītos ar 3?

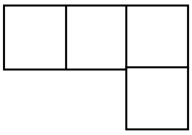
44.8. Atrodiet kaut vienu tādu skaitli *a*, ka vienlaicīgi izpildās sekojošas īpašības:

a) noapaļojot a, $3a$, $5a$, $7a$ līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz leju;

b) noapaļojot $2a$, $4a$, $6a$ līdz veselam skaitlim, jānoapaļo uz augšu.

44.9. Jānis novietoja pa apli 17 figūriņas: dažas melnas, dažas baltas. Pēteris vispirms noņēma visas tās baltās figūriņas, kurām Jāņa izvietojumā blakus atradās kaut viena melna. Pēc tam Andris noņēma visas tās melnās figūriņas, kurām Pētera iegūtajā izvietojumā blakus atradās kaut viena balta. Beidzot Juris noņēma visas tās baltās figūriņas, kurām Andra iegūtajā izvietojumā blakus atradās kaut viena melna. Palika tikai viena figūriņa (melnā).
Parādiet kaut vienu piemēru, kā sākumā Jānis varēja būt novietojis figūriņas, lai teiktais izpildītos.

44.10. Kvadrāts sastāv no 6×6 baltām rūtiņām. Kāds mazākais daudzums rūtiņu jānokrāso melnas tā, lai neviena tāda figūra, kāda parādīta 44.2. zīm., nepaliktu pilnīgi balta? (Figūra var būt novietota arī citādi.)



44.2. zīm.

7. klase

44.11. Vai a) vienpadsmit,

b) desmit

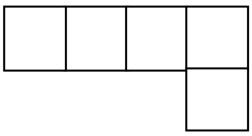
pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu summa var būt 0 ?

44.12. Tabula sastāv no 3×5 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt "+1" vai "-1" tā, lai katrs ierakstītais skaitlis būtu vienāds ar visu savu kaimiņu reizinājumu? (Divus skaitļus sauc par kaimiņiem, ja tie ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu.) Visi ierakstītie skaitļi nedrīkst būt vienādi.

44.13. Vai pastāv tādi viens otram sekojoši naturāli skaitļi, katram no kuriem ciparu summa dalās ar 19 ?

44.14. Mežā dzīvo 10 rūķīši. Katru vakaru daži no viņiem sēž mājās, bet pārējie apciemo visus mājās sēdētājus.
Pierādīt: pietiek ar piecām dienām, lai katrs rūķītis būtu apciemojis katru citu.

44.15. Kvadrāts sastāv no 8×8 baltām rūtiņām. Kāds mazākais daudzums rūtiņu jānokrāso melnas tā, lai neviena tāda figūra, kāda parādīta 44.3. zīm., nepaliktu pilnīgi balta? (Figūra var būt novietota arī citādi.)



44.3. zīm.

8. klase

44.16. Kādu atlikumu dod summa

a) $1+2+3+\cdots+30$,

b) $1+2+3+\cdots+1993+1994$,

dalot ar 3?

44.17. Atrodiet tādus skaitļus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, lai no vienādojumiem

$$ax=b,\quad bx=c,\quad cx=d,\quad dx=e,\quad ex=a$$

trijiem būtu atrisinājums, bet diviem -- nē. Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

44.18. Vai sešstūrim var būt tieši

a) seši,

b) pieci

šauri leņķi.

44.19. Konferencē piedalās 10 cilvēki; katrs ir pazīstams ar vismaz 5 citiem. Pierādiet, ka var izvēlēties 4 cilvēkus un nosēdināt viņus ap apaļu galdu tā, lai katram abās pusēs sēdētu paziņas.

(Uzskatām: ja *A* pazīstams ar *B*, tad *B* pazīstams ar *A*).

44.20. Kādu mazāko daudzumu punktu var atzīmēt plaknē tā, lai atrastos nogriežņi ar garumiem 1 cm; 2 cm; 4cm; 8 cm; 16 cm; 32 cm, kam visi galapunkti atrodas atzīmētajos punktos.

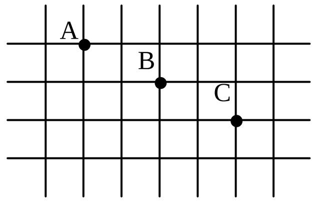
9. klase

44.21. Vai vienādojumam

$$2x^2-2x\cdot(a+b)+(a^2+b^2)=0$$

var būt atrisinājumi, ja *a* un *b* ir dažādi skaitļi?

44.22. Plakne sadalīta vienādos kvadrātos (skat. 44.1. zīm.). Pierādīt, ka punkti *A*, *B*, *C* atrodas uz vienas taisnes.



44.1. zīm.

44.23. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$x^2 + x = y^2.$$

44.24. Par trisektoru sauc ierīci, kas jebkuru nogriezni ļauj sadalīt 3 vienādās daļās. Kā, izmantojot lineālu un trisektoru, bet neizmantojot cirkuli, var atrast nogriežņa viduspunktu?

44.25. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 15 (katru tieši vienu reizi) tā, lai katru divu blakus esošu skaitļu starpība būtu 4, 5, 6 vai 7? (Pieļaujamas vienlaikus vairākas vai pat visas starpības.}

10. klase

44.26. Kvadrāta *ABCD* malas garums ir 1; *M* ir malas *AD* viduspunkts. Nogriežņi *AC* un *BM* krustojas punktā *S*. Aprēķināt trijstūra *ASM* laukumu.

44.27. Kādām *a* vērtībām vienādojumam

$$x^2 = |x - a|$$

ir tieši trīs dažādas saknes?

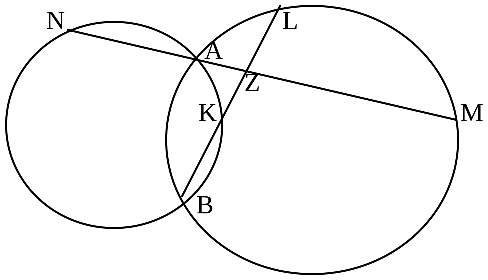
44.28. Naturālie skaitļi no 1 līdz 18 apvienoti pa pāriem tā, katra pāra skaitļu summa ir vesela skaitļa kvadrāts.
Ar ko vienā pārī ir apvienots skaitlis 1 ?

44.29. Rindā nostādīti 10 zēni un 10 meitenes. Divus bērnus var mainīt vietām tad, ja starp tiem stāv ne vairāk kā 9 citi.

a) Pierādīt, ka ar 10 maiņām noteikti pietiek, lai panāktu, ka vispirms stāv 10 zēni, bet pēc tam -- 10 meitenes.

b) Pierādīt, ka sākuma situācija var būt tāda, ka ar 9 maiņām to izdarīt nevar.

44.30. Divas riņķa līnijas krustojas punktos *A* un *B* (skat. 44. 2. zīm.).



44.2. zīm.

Taisne, kas vilkta caur *A*, krusto šīs riņķa līnijas punktos *M* un *N* tā, ka *A* atrodas starp *N* un *M*. Nogriežņa *MN* viduspunkts ir *Z*. Taisne *BZ* krusto abas riņķa līnijas punktos *L* un *K*; *Z* atrodas starp *L* un *K*.

Pierādiet, ka $ZL = ZK$.

11. klase

44.31. Dots, ka $x = y - 1$. Pierādiet, ka $(x+y)\cdot(x^2+y^2)\cdot(x^4+y^4) = y^8 - x^8$.

44.32. Caur punktu *O* trijstūra iekšpusē novilktas 3 taisnes, kas paralēlas trijstūra malām. Trijstūris sadalās trijos paralelogramos un trijos trijstūros. Pierādiet, ka paralelogramu laukumu reizinājums ir 8 reizes lielāks par trijstūru laukumu reizinājumu.

44.33. Naturāla skaitļa *n* visi pozitīvie dalītāji ir $d_1, d_2, \ldots, d_k$. Pierādiet, ka

$$\frac{d_1}{\sqrt{n}} + \frac{d_2}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{d_k}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{d_1} + \frac{\sqrt{n}}{d_2} + \cdots + \frac{\sqrt{n}}{d_k}.$$

44.34. Divas riņķa līnijas krustojas punktos *M* un *N*. Uz vienas no tām ārpus otras ņemts punkts *K*. Taisnes *KM* un *KN* krusto otru riņķa līniju atbilstoši punktos *A* un *B* tā, ka *M* atrodas starp *A* un *K*, bet *N* -- starp *B* un *K*. Pierādīt, ka taisne *AB* paralēla pirmās riņķa līnijas pieskarei punktā *K*.

44.35. Ziemassvētku dāvanu sūtījums kopā sver 225 kg. Tas iepakots sainīšos tā, ka neviens sainītis nav smagāks par 3 kg. Dāvanas iznēsā 10 Salaveči; katrs no tiem var panest ne vairāk kā 25 kg.

Pierādīt, ka dāvanas var sadalīt (sainīšus neatverot) tā, ka Salaveči tās var aiznest visas uzreiz.

12. klase

44.36. Atrisināt vienādojumu

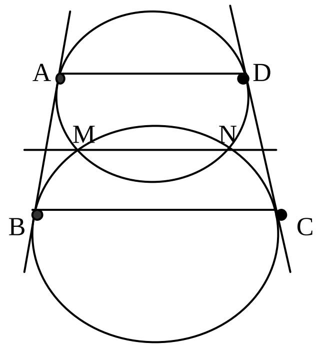
$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 1 .$$

44.37. Ar [*x*] apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *x*. Piemēram, [3] = 3; $[4.2] = 4$.

Kādiem naturāliem skaitļiem *n* skaitlis $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$ ir pirmskaitlis?

44.38. Divas riņķa līnijas krustojas punktos *M* un *N* (skat. 44.3. zīm.). Tām novilktas kopējās ārējās pieskares; pieskaršanās punkti ir trapeces virsotnes.

Pierādīt, ka *M* un *N* atrodas uz šīs trapeces viduslīnijas.



44.3. zīm.

44.39. No vienas taisnstūra paralēlskaldņa virsotnes novilktas triju skaldņu diagonāles. Pierādiet, ka to triju leņķu lielumu summa, kurus veido šīs diagonāles, ir $180°$.

44.40. Izliektā daudzstūrī katra mala un katra diagonāle nokrāsota vienā no 3 krāsām tā, ka neeksistē nekāda slēgta lauzta līnija ar virsotnēm daudzstūra virsotnēs, kuras visi posmi nokrāsoti vienā un tai pašā krāsā. Kāds lielākais malu skaits var būt dotajam daudzstūrim.