Materiāls ņemts no grāmatas: Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 45. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

45.1. Tie ir sekojoši skaitļi:

654321, 654312, 654231, 654213, 654132, 654123.

45.2. Principā iespējamas atbildes 0; 1; 2; 3; 4; 5. Tā kā visas atbildes ir dažādas, tad patiesību runājis viens vai neviens zēns. Pirmajā gadījumā šis zēns pasaka 4.
Otrajā gadījumā neviens nevar būt teicis "5", jo tad tas būtu teicis patiesību; tāpēc pateiktas ir visas pārējās atbildes, starp tām arī "4".

45.3. To var izdarīt, piemēram, tā, ka parādīts 45.3. zīmējumā.

+	+	+	+
+	+		+
		+	

45.3. zīm.

45.4. Nē. Sākotnējā skaitļa pēdējais cipars bija pāra cipars, tātad vismaz 2. Bet, reizinot iegūto četrciparu skaitli ar 6 (tā pirmais cipars ir lielāks vai vienāds ar 2), iznāk piecciparu skaitlis.

45.5. Uz katras šķautnes uzrakstīto skaitļu starpības var pieņemt vērtības no 1 līdz 11. Kubam ir 12 šķautnes; tāpēc starp iegūtajām starpībām būs vismaz divas vienādas.

45.6. Dotais reizinājums satur 6 pirmreizinātājus 5 un vairāk nekā 6 pirmreizinātājus 2; tātad beidzas ar 6 nullēm.

45.7. Var pārbaudīt, ka der, piemēram, skaitlis $a = 0{,}49$.

45.8. a) Jā; kvadrāta malas garums ir 9, un tās veido no stienīšiem
$1+8=2+7=3+6=4+5$.

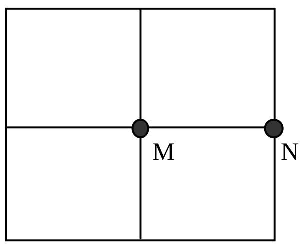
b) Nē, nevar. Šādu stienīšu garumu summa $1+2+3+\cdots+100=\frac{100\cdot 101}{2}$ nedalās ar 4, bet kvadrāta malas garumam ir jābūt veselam skaitlim.

45.9. Skat. 45.4. zīmējumu.

+	+	+	+	+	+
+	+		+	+	+
+	+	+	+		
		+		+	
					+

45.4. zīm.

45.10. Andris nostājas uz *MN* (skat. 45.5. zīm.) un neļauj Jānim izskriet ne caur *M*, ne caur *N*.



45.5. zīm.

Protams, ka pa atlikušajiem ceļiem Aivars var Jāni noķert.

45.11. a) Jā, jo šis reizinājums satur gan skaitli 7, gan 11.

b) Nē, jo 101 ir pirmskaitlis; visi reizinātāji ir mazāki par 101 un nevar dalīties ar 101. Tātad arī reizinājums nedalās ar 101.

45.12. Pieņemsim pretējo, ka jebkuru divu blakus uzrakstīto skaitļu reizinājums ir negatīvs. Tad aiz katra pozitīvā skaitļa seko negatīvs skaitlis un aiz katra negatīvā skaitļa seko pozitīvs skaitlis. Bet tas nav iespējams, jo kopējais skaitļu skaits ir nepāra skaitlis 7.

45.13. No 10 riņķa līnijām var izveidot 45 pārus (pamatojiet to!). Ja visas riņķa līnijas ir dažādas, tad katrām divām ir ne vairāk kā divi krustpunkti. Tātad kopā ir ne vairāk kā 90 krustpunktu. Ja Andris ir atradis 91 punktu, kuri pieder divām riņķa līnijām, tad vismaz divas no tām sakrīt.

45.14. Katrs rūķītis sēdēs mājās tieši divas dienas:

pirmais -- dienās ar numuriem 1. un 2.;
otrais -- dienās ar numuriem 1. un 3.;
trešais -- dienās ar numuriem 1. un 4.;
ceturtais -- dienās ar numuriem 1. un 5.;
piektais -- dienās ar numuriem 2. un 3.;
sestais -- dienās ar numuriem 2. un 4.;
septītais -- dienās ar numuriem 2. un 5.;
astotais -- dienās ar numuriem 3. un 4.;
devītais -- dienās ar numuriem 3. un 5.;
desmitais -- dienās ar numuriem 4. un 5.;

Tā kā neviens no dienu numuru pāriem nesakrīt, tad katrs rūķītis apciemos katru.

45.15. a) Tā nevar būt. Tiešām, krustiņu skaits būtu $3 \times 8 = 24$, bet mazākā 8 dažādu skaitļu summa ir $0 + 1 + 2 + \cdots + 7 = 28 > 24$.

b) Jā, var (skat. 45.6. zīm.).

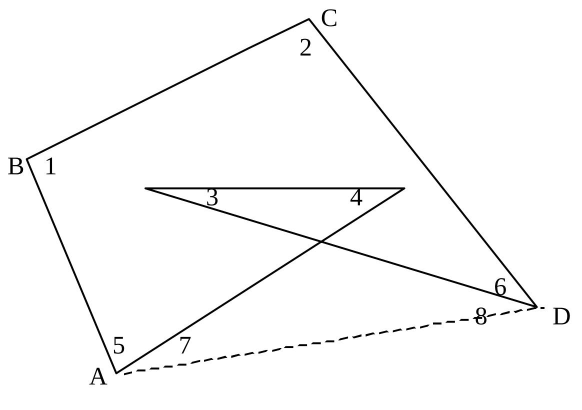
+	+	+	+	+	+	+	+
+	+	+	+	+	+	+	
+	+	+	+	+	+		
+	+	+	+	+			
							+
						+	+
					+	+	+

45.6. zīm.

45.16. Ja $a=1, b=2, c=3$, tad veidojas divi pirmskaitļi $a+b=3$ un $b+c=5$. Vairāk par diviem pirmskaitļiem nevar būt, jo starp trim skaitļiem *a*, *b*, *c* ir vismaz divi, kuru paritātes ir vienādas. Šo skaitļu summa dalās ar 2, un tā nevar būt pirmskaitlis.

45.17. No dotā seko, ka $x^2+x=1$. Tāpēc
$x^4+x^3+x-1=x^2\left(x^2+x\right)+x-1=x^2+x-1=0$.

45.18. Skat. 45.7. zīmējumu.



45.7. zīm.

Tā kā $\angle 3+\angle 4=\angle 7+\angle 8$, tad aplūkojamo leņķu summa ir vienāda ar četrstūra *ABCD* iekšējo leņķu summu, t.i., $360°$.

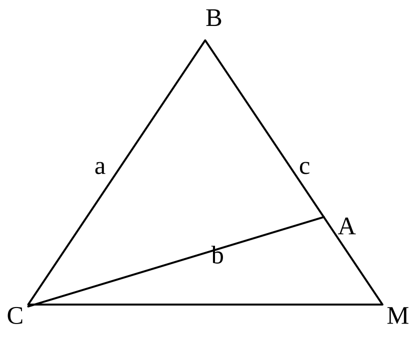
45.19. Ja katrs no konferences dalībniekiem pazīst katru, tad var izvēlēties jebkurus 4 cilvēkus. Pieņemsim, ka *A* un *B* viens otru nepazīst. Viņiem kopā ir vismaz 10 paziņas starp atlikušajiem 8 cilvēkiem. Tātad viņiem ir vismaz divi kopēji paziņas *X* un *Y*. Tad var pie apaļa galda nosēdināt 4 cilvēkus kārtībā *A*, *X*, *B*, *Y*.

45.20. Pieņemsim pretējo: uz katras taisnes, uz kuras atrodas viena astoņstūra mala, ir vismaz vēl otra. Ņemsim vienu tādu taisni *t*. Uz tās atrodas vismaz četras daudzstūra virsotnes; tātad šo taisni krusto vēl vismaz 4 taisnes, kas satur katra pa divām daudzstūra malām. Iznāk, ka daudzstūrim ir vismaz $2+4\cdot 2=10$ malas, bet tā ir pretruna.

45.21. Tā kā vienādojumiem $x^2+px+q=0$ un $x^2+ax+b=0$ ir saknes, tad to diskriminanti ir nenegatīvi: $\frac{p^2}{4}-q\geq 0$ un $\frac{a^2}{4}-b\geq 0$.

No šejienes seko, ka $\left(\frac{ap}{2}\right)^2=\frac{a^2b^2}{4}\geq\frac{a^2b^2}{16}\geq qb$. Tātad arī vienādojumam $x^2+apx+bq=0$ ir sakne.

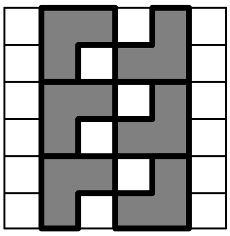
45.22. Skaidrs, ka $60°$ lielais leņķis kā vidējais pēc lieluma atrodas pret malu *b*. Tālāk skat. 45.2. zīm., kur *ABC* -- dotais trijstūris, bet *BCM* -- regulārs trijstūris.



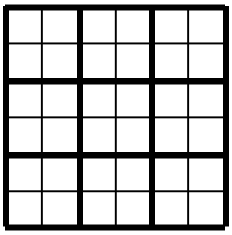
45.2. zīm.

Redzam, ka $MC=a$, $MA=a-c$, $AC=b$, $\angle M=60°$; tātad trijstūris *ACM* ir meklētais.

45.23. No 45.3. zīmējuma redzams, ka pietiek izgriezt 6 stūrīšus. Ar mazāku skaitu nepietiek. Tiešām, ja izgriežam mazāk par 6 stūrīšiem, tad neizgrieztas paliek vismaz $36-15=21$ rūtiņa; tātad kādā no 45.4. zīmējumā parādītajiem 9 kvadrātiem būs neizsvītrotas vismaz 3 rūtiņas. Šīs rūtiņas veidos vēl vienu izgriežamu trijstūri.

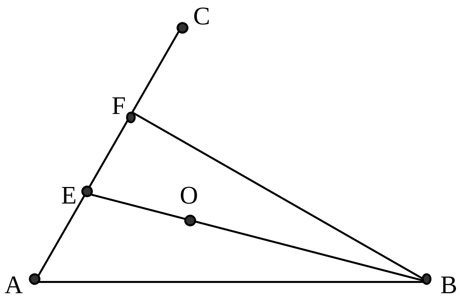


45.3. zīm.



45.4. zīm.

45.24. Pieņemsim, ka jāsadala uz pusēm nogrieznis *AB* (skat. 45.5. zīm.). Novelkam *AC*. Ar trisektoru atrodam punktus *E* un *F* tā, ka $AE = EF = FC$. Tad *E* ir *AF* viduspunkts. Ar trisektoru atrodam tādu punktu *O* uz *EB*, ka $EO = \frac{1}{3}EB$. Tad *O* ir trijstūra *AFB* mediānu krustpunkts, un taisne *FO* krustos nogriezni *AB* tā viduspunktā.



45.5. zīm.

45.25. a) Ja *n* ir pāra skaitlis, tad viss reizinājums dalās ar 2; ja *n* ir nepāra skaitlis, tad $13n+1$ ir pāra skaitlis, un arī viss reizinājums dalās ar 2.

b) Ja $n = 3k$, tad reizinājums dalās ar 3.

Ja $n = 3k+1$, tad $19n+2 = 57k+21$ dalās ar 3; arī viss reizinājums dalās ar 3.

Ja $n = 3k+2$, tad $13n+1 = 39n+27$ dalās ar 3; arī viss reizinājums dalās ar 3.

Tā kā reizinājums dalās ar 2 un 3, tad dalās arī ar 6.

45.26. Viegli iegūt $xy = (x+y)^2 - (x^2 + xy + y^2) = 9 - 7 = 2$. Tālāk jārisina sistēma

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2\,. \end{cases}$$

To atrisinot, iegūstam atbildes: (2; 1), (1; 2). Nepieciešam pārbaude.

45.27. Riņķa centrs atrodas daudzstūra iekšpusē. Savienojot to ar daudzstūra virsotnēm, tas sadalās vienādsānu trijstūros. Tā kā starp daudzstūra malām ir arī dažādas, tad atradīsies divi blakusstāvoši trijstūri OA_1A_2 un OA_2A_3, kas nav vienādi. No tā, ka visi daudzstūra leņķi ir vienādi, seko, ka trijstūris OA_3A_4 vienāds ar trijstūri OA_1A_2; tātad vienādie trijstūri izvietoti pamīšus, un no tā seko, ka daudzstūra malu skaits ir pāra skaitlis.

45.28. a) Visas starpības reizinājumā ir pāra skaitļi, bet 6 pāra skaitļu reizinājums dalās ar $2^6 = 64$.

b) Šķirojam gadījumus, cik no skaitļiem *x*, *y*, *z*, *t* dod atlikumu 1 un cik -- atlikumu 3, dalot ar 4. Iegūstam, ka visos gadījumos vismaz divas starpības dalās ar 4. Tas nozīmē, ka viss reizinājums dalās $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.

c) No skaitļiem *x*, *y*, *z*, *t* vismaz divi dod vienādus atlikumus, dalot ar 3; atbilstošā starpība dalās ar 3; tātad viss reizinājums dalās ar $3 \cdot 256 = 768$.

45.29. a) Aplūkojam vietu ar numuru 1. Ja tur stāv meitene, tad kādā no vietām ar numuriem no 2. līdz 11. stāv zēns (citādi meiteņu būtu vairāk par 10). Mainot šos bērnus vietām, pirmajā vietā atradīsies zēns. Tālāk aplūkojam vietu ar numuru 2.. Ja tur stāv meitene, tad kādā no vietām ar numuriem no 3. līdz 12. stāv zēns. Mainot šos bērnus vietām, otrajā vietā atradīsies zēns. Tā turpinot, nevairāk kā ar 10 maiņām iegūsim prasīto izvietojumu.

b) Ja pirmajās 10 vietās stāv meitenes, vajadzīgas vismaz 10 maiņas, jo vienas maiņas rezultātā ne vairāk kā viens zēns var nostāties savā vietā (pirmajā desmitniekā).

45.30. Uzrakstīsim trijstūra nevienādību $|a - b < c|$ un kāpināsim to kvadrātā:

$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2 \quad .$$

Līdzīgi iegūstam nevienādības $b^2 - 2bc + c^2 < a^2$ un $c^2 - 2ac + a^2 < b^2$.

Summējot šīs trīs nevienādības, iegūstam prasīto.

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac < a^2 + b^2 + c^2 \quad \Leftrightarrow$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac < 4(ab + bc + ac) \quad \Leftrightarrow$$
$$(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ac).$$

45.31. No tā, ka $3a + 4b$ un $2a + 3b$ dalās ar7, seko, ka
$a + b = (3a + 4b) - (2a + 3b)$ dalās ar 7. Līdzīgi iegūstam, ka
$b = (2a + 3b) - 2 \cdot (a + b)$ dalās ar 7.

No vienādības $2a = (2a+3b) - 3b$ seko, ka $2a$ dalās ar 7; tātad arī a dalās ar 7.

45.32. Var uzrakstīt 8 skaitļus. Tiešām, ja pirmie skaitļi ir 3 un 2, tad iegūstam virkni

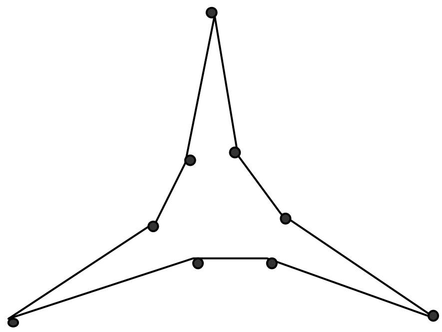
3, 2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81.

Pierādīsim, ka vairāk par 8 skaitļiem nevarēja būt uzrakstīti. Pieņemsim, ka sakumā bija uzrakstīti skaitļi a un b, un virknē desmitais loceklis ir vienāds ar 81. Iegūstam virkni

$$a, \quad b, \quad a+b, \quad a+2b, \quad 2a+3b,$$
$$3a+5b, \quad 5a+8b, \quad 8a+13b, \quad 13a+21b, \quad 21a+34b.$$

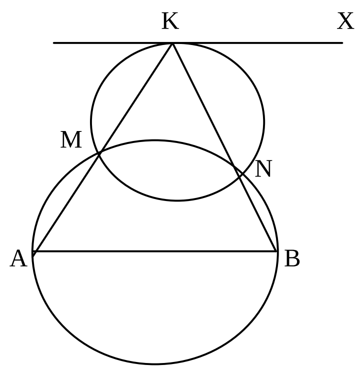
Tātad $21a+34b=81$; no šejienes $34b = 81-21a \le 60$. Tā kā b ir naturāls skaitlis, tad jābūt $b=1$.Taču tad $21a = 81-34 = 47 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{47}{21}$, un a nav naturāls skaitlis. Iegūta pretruna.

45.33. Skat. piem. 45.6. zīm.



45.6. zīm.

45.34. Skat. 45.7. zīm.



45.7. zīm.

No hordas - pieskares leņķa un ievilktā leņķa īpašībām seko, ka $\angle XKN = \angle KMN$. No riņķī ievilkta četrstūra īpašībām seko, ka $\angle KMN = 180° - \angle AMN = \angle ABN$. Tātad $\angle XKN = \angle ABN$, no kurienes seko taišņu KX un AB paralelitāte.

45.35. Apgalvojumu pierādīsim ar matemātisko indukciju pēc pilsētu skaita *n*.

Bāze: $n = 2$; apgalvojums ir acīmredzams.

Induktīvā pāreja: ($k \to k+1$). Pieņemsim, ka *k* pilsētas sakārtotas prasītajā maršrutā:

$$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_i \to A_{i+1} \to \cdots \to A_k .$$

Aplūkosim pilsētu A_{k+1}.

Pieņemsim, ka no pilsētas A_{k+1} iet ceļš virzienā uz A_1 (apzīmēsim $A_{k+1} \to A_1$). Tad pilsētu A_{k+1} var pievienot ceļu virknes sākumā.

Tātad uzskatīsim, ka $A_1 \to A_{k+1}$. Ja visiem *i* izpildās $A_i \to A_{k+1}$, tad pilsētu A_{k+1} var pievienot ceļu virknes beigās. Pretējā gadījumā atradīsies tāds numurs i, ka $A_i \to A_{k+1}$, bet $A_{k+1} \to A_{i+1}$ (pirmā vieta, kur notiek ceļu virzienu maiņa). Tad pilsētu A_{k+1} var ievietot starp pilsētām A_i un A_{i+1}. Apgalvojums pierādīts.

45.36. Ja $\operatorname{tg} x > 0$, tad arī $\operatorname{ctg} x > 0$, un tāpēc $\sin x > 0, \cos x > 0$. Bet tādā gadījumā $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} > \cos x$; iegūta pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.

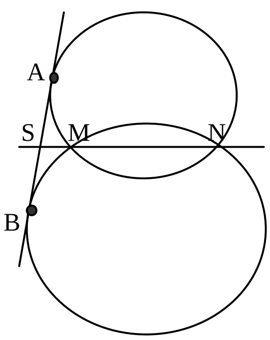
Ja $\operatorname{tg} x < 0$, tad no uzdevuma nosacījumiem seko, ka $\sin x < 0$ un $\cos x < 0$; bet tādā gadījumā $\operatorname{tg} x > 0$. Pretruna.

45.37. Izteiksmi var pārveidot formā

$$n^4 - 5n^2 + 4 = \left(n^2 - 1\right) \cdot \left(n^2 - 4\right) = (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Viens no 5 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem $n-2$; $n-1$; n; $n+1$; $n+2$ dalās ar 5 (bet tas nav *n*, jo *n* ir pirmskaitlis); tāpēc reizinājums dalās ar 5. Tā kā *n* nedalās ar 3, tad no diviem skaitļiem $n-2$ un $n-1$ viens dalās ar 3; ja $n-2$ dalās ar 3, tad arī $n+1$ dalās ar 3; ja $n-1$ dalās ar 3, tad arī $n+2$ dalās ar 3. Tātad viss reizinājums dalās ar 9. Ja skaitlis dalās ar 5 un 9, tad tas dalās ar 45.

45.38. Skat. 45.8. zīm.



45.8. zīm.

Pieņemsim, ka taisne *MN* krusto kopējo pieskari *AB* punktā *S*. No teorēmas par hordu reizinājumu seko, ka $SA^2 = SM \cdot SN$ un $SB^2 = SM \cdot SN$; tātad $SA = SB$. Līdzīgi pierada, ka *MN* arī otru trapeces malu krusto tās viduspunktā; tātad *MN* ir aplūkojamās trapeces viduslīnija.

45.39. Aplūkosim doto 9 figūru papildinājumus (papildinājums ir tā kuba daļa, kas nepieder aplūkojamai figūrai). Doto figūru laukumus apzīmēsim ar F_i, $i = 1, 2, \ldots, 9$.

Papildinājumu tilpumu summa ir

$$\left(1 - F_1\right) + \left(1 - F_2\right) + \cdots + \left(1 - F_3\right) = 9 - \left(F_1 + F_2 + \cdots + F_9\right) < 9 - 8 = 1 \ .$$

Tātad atradīsies kāds punkts, kas nepieder nevienam papildinājumam, t.i. pieder visām figūrām.

45.40. Apgalvojumu pierādīsim ar matemātisko indukciju pēc pilsētu skaita *n*.

Bāze: $n = 2$; apgalvojums ir acīmredzams.

Induktīvā pāreja: ($k \to k+1$). Pieņemsim, ka *k* pilsētām $P_1, P_2, \ldots, P_k$ der kompānija *A*. Ņemsim vēl pilsētu P_{k+1}.

Ja to kaut ar vienu no k iepriekšējām pilsētām savieno aviokompānijas A reiss, tad aviokompānija A der priekš visām $k+1$ pilsētām.
Ja pilsētu P_{k+1} ne ar vienu no iepriekšējām k pilsētām nesavieno kompānijas A reiss, tad pilsētu P_{k+1} ar katru no iepriekšējām k pilsētām savieno otras kompānijas B reiss; tādā gadījumā kompānija B varēs apkalpot visas $k+1$ pilsētas.

Materiālā izmantota izstrādne: A. Andžāns, L. Eglīte, I. Jēkabsone, K. Lomanovska, E. Broka, A. Cauka "Matemātikas sacensības 5. - 9. klasēm 1994./95. mācību gadā". Zīmējumu numerācija saglabāta kā minētajā izstrādnē.
Materiāls satur 5.-9. klašu rajona matemātikas olimpiādes uzdevumus, atrisinājumus, kā arī ievaduzdevumus un to atrisinājumus.

Rajona 1994./95.m.g. matemātikas olimpiādes

IEVADUZDEVUMU ATRISINĀJUMI

1. Atbilde. 321; 312; 231.

Risinājums. Skaidrs, ka vislielākais trīsciparu skaitlis ir tas, kuram vecākajā šķirā atrodas lielākais cipars, t. i. 3. Tātad pastāv divas iespējas 321 un 312.

Trešais lielākais skaitlis būs 231, simtu šķirā ņemot ciparu 2, bet desmitu šķirā – ciparu 3, jo 231>213.

3. Atbilde. Skat., piemēram, 96. zīmējumu. Visās rindiņās ir atšķirīgs krustiņu skaits (1; 2; 3), bet visās kolonās ir viens un tas pats krustiņu skaits – 2.

X	X	X
X	X	
		X

96. zīm.

4. Atbilde. Sākuma skaitlis bija 714285.

Risinājums. Pierakstīsim sešciparu skaitli kā

$100000a+b$, kur a ir cipars ($1\le a\le 9$),

b – piecciparu skaitlis ($0\le b\le 99999$).

Pēc ciparu pārkārtošanas iegūsim skaitli $10b+a$. Tā kā iegūtais skaitlis ir 5 reizes mazāks par sākotnējo, tad

$$100000a+b=50b+5a$$

$$99995a=49b.$$

Skaitlis 99995 dalās ar 7 (99995:7=14285), bet nedalās ar 49 (14285:7=2040, atl. 5).

Ja a=7, tad

$$99995a=699965$$
$$49b=699965$$
$$b=14285.$$

Tātad sākuma skaitlis ir

$100000a+b=$

$=100000\cdot 7+14285=$

$=\underline{\mathbf{714285}}$ (714285:14285=5).

<u>5. Atbilde</u>. Iegūtās starpības ir 2; 4; 8; 14; 28. Vienādu starpību nav.

<u>6. Risinājums</u>. Lai divu naturālu skaitļu reizinājuma pēdējais cipars būtu 0, jāsareizina:

1) skaitlis, kurš beidzas ar 5 un pāra skaitlis, piemēram,

$$1\underline{5}\cdot 1\underline{2}=18\underline{0}$$
$$12\underline{5}\cdot 1\underline{6}=225\underline{0};$$

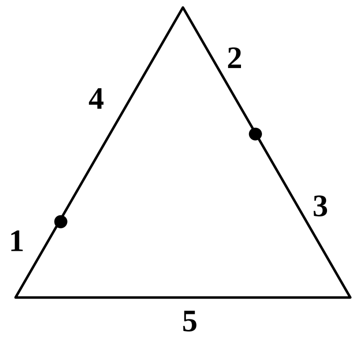
2) skaitlis, kurš beidzas ar 0 un jebkurš skaitlis, piemēram,

$$17\cdot 2\underline{0}=34\underline{0}$$
$$186\cdot 3\underline{0}=558\underline{0}.$$

<u>7. Atbilde</u>. a) a≈2;

b) 2a=2·1,67=3,34≈3; 3a=3·1,67=5,01≈5.

<u>8. Atbilde</u>. a) Jā, var (skat. piemēram, 97. zīm.).



97. zīm.

b) nē, nevar.

<u>Risinājums</u>. Lai saliktu vienādmalu trijstūra kontūru visu stienīšu garumu summai jādalās ar 3.

a) 1+2+3+4+5=15; 15 dalās ar 3, tātad var salikt vienādmalu trijstūra kontūru no 5 stienīšiem, kuru garumi ir 1; 2; 3; 4; 5.

b) 1+2+3+4+6=16; 16 nedalās ar 3, tātad nevar salikt vienādmalu trijstūra kontūru no 5 stienīšiem, kuru garumi ir 1; 2; 3; 4; 6.

<u>9. Atbilde</u>. Skat., piemēram, 98. zīmējumu. Visās rindiņās ir atšķirīgs krustiņu skaits (0; 1; 2; 3; 4), bet visās kolonās ir viens un tas pats krustiņu skaits – 2.

X				
	X	**X**		
		X	**X**	**X**
X	**X**		**X**	**X**

98. zīm.

<u>11. Atbilde</u>. 1. 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120.

2. a) Jā, dalās;

b) nē, nedalās.

<u>Risinājums</u>. 1. Naturālo skaitļu no 1 līdz 5 reizinājums $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$ dalās ar visiem reizinātājiem 2; 3; 4; 5, kā arī ar skaitļiem

$2\cdot3=$<u>6</u>

$2 \cdot 4 = \underline{8}$

$2 \cdot 5 = \underline{10}$

$3 \cdot 4 = \underline{12}$

$3 \cdot 5 = \underline{15}$

$4 \cdot 5 = \underline{20}$

$2 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{24}$

$2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{30}$

$2 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{40}$

$3 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{60}$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \underline{120}$.

2. a) Skaitļu no 1 līdz 20 ieskaitot reizinājums dalās ar 21 tādā gadījumā, ja tas dalās ar visiem skaitļa 21 pirmreizinātājiem. Tie ir 3 un 7, jo

$$21 = 7 \cdot 3.$$

Reizinājums $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 20$ satur reizinātājus 7 un 3, tātad tas dalās ar 21.

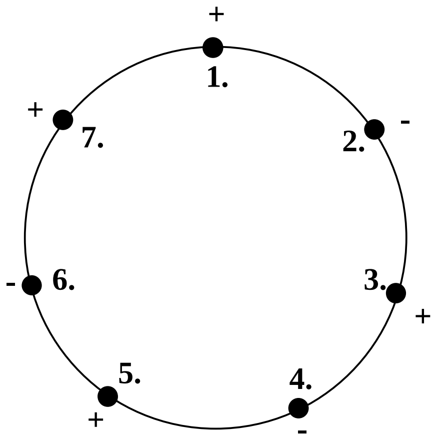
b) Skaitļu no 1 līdz 20 ieskaitot reizinājums dalās ar 23 tādā gadījumā, ja tas dalās ar visiem skaitļa 23 pirmreizinātājiem. Skaitlis 23 ir pirmskaitlis, bet reizinājums $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 20$ nesatur reizinātāju 23, tātad nedalās ar 23.

12. Atbilde. 1. Nē, nevar.

2. a) Negatīvs;

b) pozitīvs.

Risinājums. 1. Lai jebkuru divu blakus uzrakstītu skaitļu reizinājums būtu negatīvs, tad pamīšus jāizvietojas pozitīviem un negatīviem skaitļiem. Pieņemot, ka 1. pozīcijā ievietojas pozitīvs skaitlis, iegūstam 99. zīmējumā parādīto ainu (ar “+” apzīmēti pozitīvi, ar “-” – negatīvi skaitļi).



99. zīm.

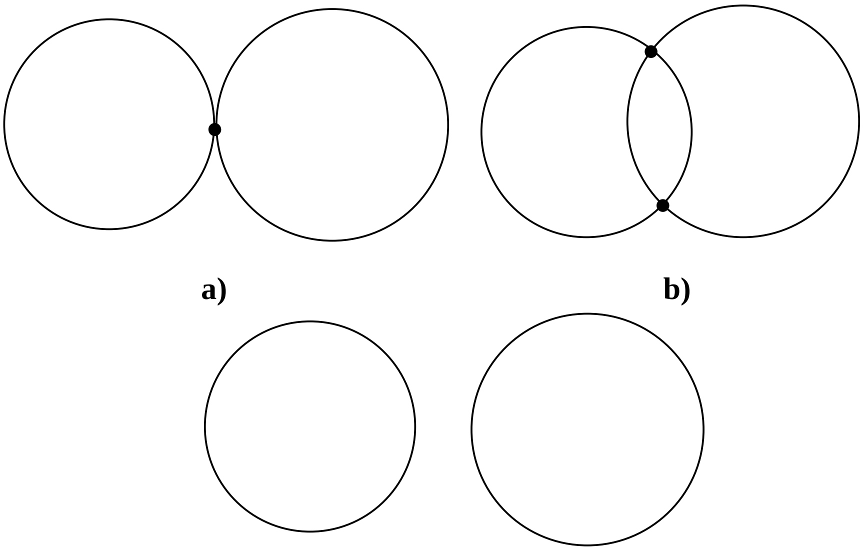
Redzam, ka 1. un 7. pozīcijā blakus atrodas pozitīvi skaitļi, tātad to reizinājums ir pozitīvs. Tātad nevar būt tā, ka jebkuru divu blakus uzrakstītu skaitļu reizinājums ir negatīvs.

Gadījumu, kad 1. pozīcijā atrodas negatīvs skaitlis, analizē līdzīgi.

2. Tā kā jebkura skaita pāra skaitļu reizinājums vienmēr ir pozitīvs skaitlis, tad viss ir atkarīgs no negatīvo reizinātāju skaita. Nepāra skaita negatīvu skaitļu reizinājums ir negatīvs skaitlis, bet pāra skaita negatīvu skaitļu reizinājums ir pozitīvs skaitlis.

13. Atbilde. 20.

Risinājums. Divām riņķa līnijām ir vai nu viens kopīgs punkts, ja tās saskaras (skat. 100. a) zīm.), divi kopīgi punkti, ja tās krustojas (skat. 100. b) zīm.), vai arī nav neviena kopīga punkta, ja tās nesaskaras un nekrustojas (skat. 100. c) zīm.).



a) b) c)

100. zīm.

Tātad divām dažādām riņķa līnijām kopīgo punktu nav vairāk par 2. Bet tas nozīmē, ka 5 dažādām riņķa līnijām kopīgo punktu ir ne vairāk kā

$$2\cdot(4+3+2+1+0)=20.$$

Pirmajai riņķa līnijai būs kopīgi punkti ar ne vairāk kā 4 citām riņķa līnijām. Otrajai riņķa līnijai kopīgos punktus ar pirmo riņķa līniju vairs neskaitīsim (tie jau ir ieskaitīti), tātad jauni kopīgi punkti tai būs ar ne vairāk kā 3 riņķa līnijām, trešajai - ar ne vairāk kā 2 riņķa līnijām, ceturtajai - ar ne vairāk kā 1 riņķa līniju, līdz beidzot piektajai riņķa līnijai jaunu kopīgu punktu vairs nebūs ne ar vienu citu.

Tātad 20 ir lielākais kopīgo punktu skaits 5 riņķa līnijām.

15. Atbilde. Nē, nevar.

Risinājums. Ja katrā kolonnā būs 2 krustiņi, tad kopā būs $2\times4=8$ krustiņi; ja visās rindiņās krustiņu skaits ir dažāds, tad kopā būs $1+2+3+4=10$ krustiņi. Bet $8<10$, tātad ar šādiem noteikumiem krustiņus iezīmēt nevarēsim.

16. Atbilde. **a)** Nē, nevar;

b) nē, nevar;

c) jā, ir iespējams.

<u>Risinājums</u>. Tā kā visi pirmskaitļi ir nepāra skaitļi, izņemot 2, bet summa 2 nav iespējama, jo a un b ir dažādi naturāli skaitļi, tad nepāra skaitli var iegūt, ja saskaita pāra skaitli un nepāra skaitli. Tāpēc a) un b) gadījumos summa a+b nevar būt pirmskaitlis, jo abos gadījumos tā ir pāra skaitlis, c) gadījumā summa var būt pirmskaitlis, piemēram, ja a=3 un b=4, tad a+b=3+4=7.

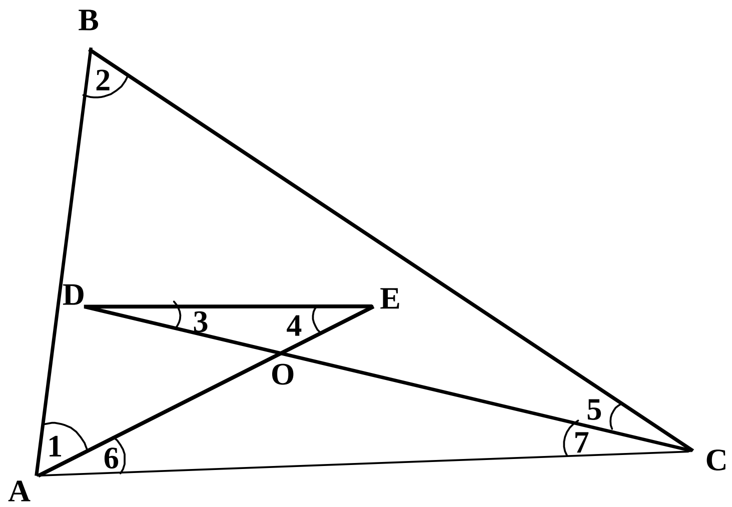
<u>17. Atbilde</u>. $x^4+x^3+x-1=(x^2+1)(x^2+x-1)$.

<u>Risinājums</u>.

$$\begin{aligned}&x^4+x^3+x-1=\\&=(x^4-1)+(x^3+x)=\\&=(x^2-1)(x^2+1)+x(x^2+1)=\\&=(x^2+1)(x^2+x-1).\end{aligned}$$

<u>18. Atbilde</u>. $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=180°$.

<u>Risinājums</u>. Apskatīsim 101. zīmējumu.



101. zīm.

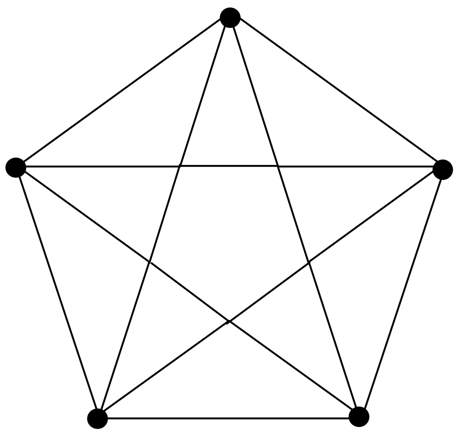
Trijstūru DEO un AOC leņķu summa ir 180°; $\angle DOE=\angle AOC$ kā krustleņķi.

Tāpēc $\angle 3+\angle 4=\angle 7+\angle 6$. Iegūstam, ka

$$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5=$$
$$=\angle 1+\angle 2+\angle 5+\angle 6+\angle 7=$$
$$=(\angle 1+\angle 6)+(\angle 5+\angle 7)+\angle 2=$$
$$=\angle A+\angle C+\angle B=$$
$$=180°,$$

jo trijstūra ABC leņķu lielumu summa ir 180°.

19. Pierādījums. Apzīmēsim matemātikas pulciņa dalībniekus ar punktiem (skat. 102. zīm.).

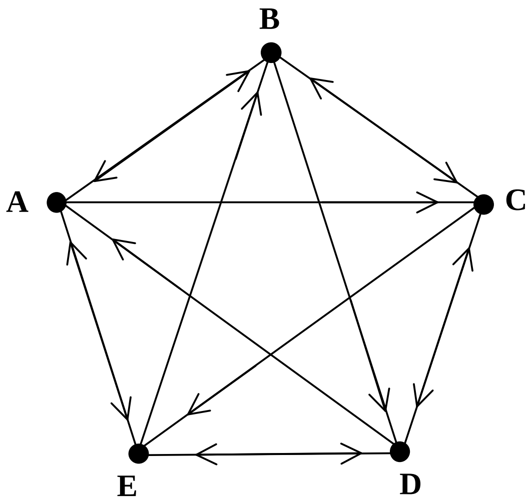


102. zīm.

Savienosim katrus divus punktus ar nogriezni. No katra punkta iziet 4 līnijas, tāpēc nogriežņu pavisam ir $\frac{5\cdot 4}{2}=10$.

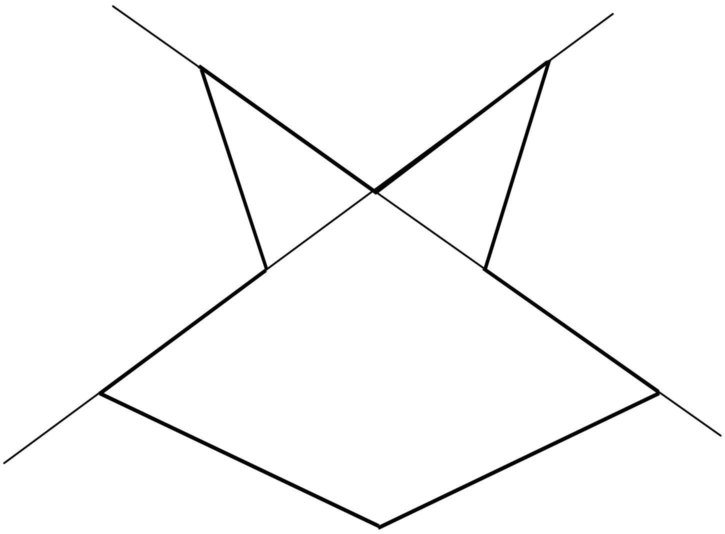
Ja matemātikas pulciņa dalībnieks A ir nosūtījis apsveikuma kartīti dalībniekam B, tad uz nogriežņa AB atzīmēsim bultiņu virzienā no punkta A uz punktu B. Katrs matemātikas pulciņa dalībnieks ir nosūtījis 3 apsveikuma kartītes, tātad pavisam jāatzīmē 5·3=15 bultiņas. Bultiņu ir vairāk nekā nogriežņu, tāpēc noteikti atradīsies nogrieznis, uz kura atzīmētas 2 bultiņas.

Šī nogriežņa galapunktiem atbilstošie dalībnieki nosūtījuši apsveikuma kartītes viens otram (skat., piemēram, 103. zīm.).



103. zīm.

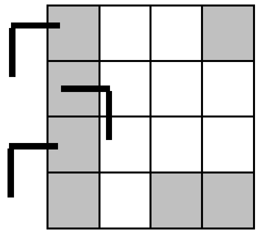
20. Risinājums. Skat., piemēram, 104. zīmējumu.



104. zīm.

23. Atbilde. Mazākais “stūrīšu” daudzums ir 3.

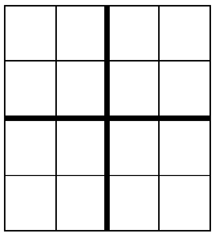
Risinājums. Kā redzams 105. zīmējumā, pietiek ar 3 stūrīšu izgriešanu. Neizgrieztās rūtiņas iekrāsotas.



105. zīm.

Ja izgrieztu mazāk par 3 stūrīšiem (t. i., ne vairāk par 2 stūrīšiem), tad tiktu izgrieztas ne vairāk par $2 \cdot 3 = 6$ rūtiņām; tātad neizgrieztas paliktu vismaz $16 - 6 = 10$ rūtiņas.

Tās kaut kā sadalās pa 4 106. zīmējumā redzamajiem kvadrātiem ar izmēriem 2×2. Tā kā $10 > 4 \cdot 2 = 8$, tad kādā no šiem 2×2 rūtiņu kvadrātiem būs vismaz 3 neizgrieztas rūtiņas; tās veido vismaz vienu vēl izgriežamu stūrīti.



106. zīm.

Tātad meklējamais minimums ir 3.

<u>**25. Pierādījums**</u>**.** Ja n ir pāra skaitlis, tad reizinātājs n dalās ar 2 un reizē ar to viss reizinājums $n \cdot (13n+1)$ dalās ar 2.

Ja n – nepāra skaitlis, tad reizinātājs $13n+1$ ir pāra skaitlis, tāpēc tas dalās ar un arī viss reizinājums $n \cdot (13n+1)$ dalās ar 2.

Rajona matemātikas olimpiādes (1994./95.m.g.)

5.-9.kl. uzdevumu atrisinājumi

1. Atbilde. Šie skaitļi ir 654321; 654312; 654231; 654213; 654132; 654123.

Risinājums. Skaitļi, kuriem pirmais cipars ir 6, ir lielāki par visiem pārējiem. Starp šiem skaitļiem skaitļi, kuriem otrais cipars ir 5, ir lielāki par pārējiem; savukārt starp šiem skaitļiem skaitļi, kuriem trešais cipars ir 4, ir lielāki par visiem pārējiem.

Atlikušos 3 ciparus var izvietot 6 dažādās secībās:

$$321>312>231>213>132>123.$$

Tātad meklējamā 6 lielāko patīkamo skaitļu secība ir

$$654321>654312>654231>654213>654132>654123.$$

2. Pierādījums. Principā iespējamas atbildes 0; 1; 2; 3; 4; 5. Tā kā visas atbildes bija dažādas, tad patiesību runājis viens vai neviens zēns jo, ja, patiesību būtu runājuši vismaz divi zēni, tad vismaz viņu dotās atbildes būtu vienādas. Bet tā nav, visas atbildes ir dažādas.

Pirmajā no iespējamajiem gadījumiem (kad patiesību runāja viens zēns) šis zēns nevar būt teicis “5”, jo tad viņš būtu melojis. Tādējādi viņš sevi būtu ieskaitījis melotājos.

Otrajā iespējamajā gadījumā (kad neviens no zēniem neteica patiesību) neviens zēns nevar būt teicis “5”, jo tad tas būtu runājis patiesību.

Tātad paliek piecas iespējamās atbildes 0; 1; 2; 3; 4. Tā kā visas piecas zēnu dotās atbildes ir dažādas, tad visi skaitļi 0; 1; 2; 3; 4 arī ir nosaukti.

3. Atbilde. Skat., piemēram, 207. zīmējumu.

X	**X**	**X**	**X**
X	**X**		**X**
		X	

207. zīm.

<u>4. Atbilde</u>. Nē, nevar.

<u>Risinājums</u>. Sākotnējam četrciparu skaitlim vajadzētu būt vienādam ar iegūtā četrciparu skaitļa reizinājumu ar 6. Tātad sākotnējā četrciparu skaitļa pēdējam ciparam būtu jābūt pāra ciparam, jo, reizinot 6 ar jebkuru naturālu skaitli, iegūst skaitli, kam pēdējais cipars ir pāra. Tomēr pēdējais cipars nevar būt 0, jo tad iegūstamajam četrciparu skaitlim pirmais cipars būtu 0 un tas būtu trīsciparu skaitlis. Tātad sākotnējā skaitļa pēdējais cipars ir pāra, turklāt lielāks vai vienāds ar 2.

<u>5. Pierādījums</u>. Starpībām ir 11 dažādas iespējamās vērtības: 1; 2; …; 11. Tiešām dažādu naturālu skaitļu starpība nevar būt mazāka par 1; savukārt lielāku starpību iegūst, ja no iespējami lielāka mazināmā atņem iespējami mazāku mazinātāju, mūsu gadījumā – no 12 atņem 1. Bet kubam ir 12 šķautnes. Tā kā 12>11, tad divām šķautnēm starpības ir vienādas.

<u>6. Atbilde</u>. Reizinājums beidzas ar 6 nullēm.

<u>Risinājums</u>. Visus reizinātājus sadalīsim pirmreizinātājos

$$1011\cdot 12\cdot\ldots\cdot 28\cdot 29\cdot 30=$$
$$=(2\cdot 5)\cdot 11\cdot(2\cdot 2\cdot 3)\cdot 13\cdot\ldots\cdot(2\cdot 27)\cdot 29\cdot(2\cdot 3\cdot 5).$$

Jautājumu "Ar cik nullēm beidzas reizinājums?" mēs varam aizstāt ar jautājumu "Cik reizes reizinājumā tiek iegūts skaitlis 10?".

Skaitļa 10 pirmreizinātāji ir 2 un 5 ($10=2\cdot 5$). Noskaidrosim, cik reizinājumā

$$(2\cdot 5)\cdot 11\cdot(2\cdot 2\cdot 3)\cdot 13\cdot\ldots\cdot(2\cdot 27)\cdot 29\cdot(2\cdot 3\cdot 5)$$

ir reizinātāju 2 un cik tajā ir reizinātāju 5. Sāksim ar 5.

$$10=2\cdot\underline{5};$$
$$15=3\cdot\underline{5};$$
$$20=4\cdot\underline{5};$$
$$25=\underline{5}\cdot\underline{5};$$
$$30=6\cdot\underline{5}.$$

Redzam, ka ir seši reizinātāji 5.

Cik būs reizinātāju 2?

$$10=\underline{2}\cdot 5;$$
$$12=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 3;$$
$$14=\underline{2}\cdot 7;$$
$$16=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{2};$$

utt.

Tāpat turpinot, redzam, ka reizinātāju 2 ir daudz vairāk nekā seši, t. i., vairāk par reizinātāju 5 skaitu. Tas nozīmē, ka skaitlis 10 veidojas 6 reizes un reizinājums

$$1011\cdot 12\cdot\ldots\cdot 28\cdot 29\cdot 30$$

beidzas ar 6 nullēm.

7. Atbilde. Var ņemt, piemēram, skaitli a=0,49.

Risinājums. Vispirms atcerēsimies kā notiek skaitļa noapaļošana līdz veselam skaitlim:

1) skaitlis tiek noapaļots uz leju, ja aiz komata ir mazāk kā piecas desmitdaļas, piemēram, 0,3≈0; 1,4≈1; 2,43≈2; 4,495≈4;

2) skaitlis tiek noapaļots uz augšu, ja aiz komata ir ne mazāk kā piecas desmitdaļas, piemēram, 1,5≈2; 0,63≈1; 8,9≈9; 3,556≈4.

Tas nozīmē, ka a ir decimāldaļa, kam pirmais cipars aiz komata ir 0; 1; 2; 3 vai 4. Var ņemt, piemēram, skaitli a=0,49. Tiešām:

$2a=0,98;$

$3a=1,47;$

$4a=1,96;$

$5a=2,45;$

$6a=2,94;$

$7a=3,43.$

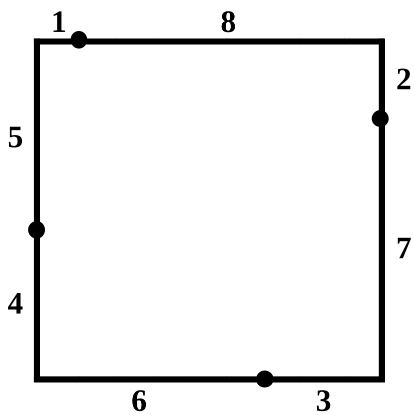
8. Atbilde. a) Jā, var;

b) nē, nevar.

Risinājums. a) Kvadrāta kontūru varēsim salikt, ja vienlaicīgi izveidosim no dotajiem stienīšiem četrus vienāda garuma nogriežņus. Ja mums ir doti stienīši, kuru garumi ir 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8, tad četrus vienādus garumus varam izveidot šādā veidā:

$$\begin{aligned} &1+8= \\ &=2+7= \\ &=3+6= \\ &=4+5= \\ &=\underline{9}. \end{aligned}$$

Tātad kvadrātu veidosim šādā veidā (skat. 208. zīm.):



208. zīm.

b) Lai varētu izveidot kvadrātu, stienīšu garumu summai, kas ir visu kvadrāta malu garumu summa, jādalās ar 4 (jo visu četru kvadrāta malu garumi ir vienādi), kā, piemēram, a) gadījumā:

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36;$$
$$36:6=9.$$

Vai 1+2+…+99+100 dalīsies ar 4? Šo summu nedaudz pārveidosim:

$$\begin{aligned}&1+2+\ldots+99+100=\\&=(1+2+\ldots+8)+(9+10+\ldots+16)+(17+18+\ldots+24)+\ldots+(97+98+99+100)=\\&=(1+2+\ldots+8)+((1+8)+(2+8)+\ldots+(8+8))+((1+2\cdot8)+(2+2\cdot8)+\ldots+\\&\ \ +(8+2\cdot8)+\ldots+((1+12\cdot8)+(2+12\cdot8)+(3+12\cdot8)+(4+12\cdot8))=\\&=(1+\ldots+8)+(1+\ldots+8+8\cdot8)+(1+\ldots+8+2\cdot8\cdot8)+\ldots+(1+\ldots+4+12\cdot8\cdot4).\end{aligned}$$

Summa 1+…+8 ir 36 un dalās ar 4;
8·8, 2·8·8, 3·8·8 utt. Arī dalās ar 4.
Tagad mums atliek apskatīt izteiksmi pēdējās iekavās:
1+2+3+4+12·8·4=10+12·8·4; 10 ar 4 nedalās, tātad ar 4 nedalās arī 10+12·8·4; ja ar 4 nedalās izteiksme pēdējās iekavās, tad arī visa summa 1+2+…+99+100 nedalās ar 4 un salikt kvadrāta kontūru no 100 stienīšiem ar dotajiem malu garumiem nav iespējams.
Citādi risinot, vispirms var aprēķināt summu 1+2+…+99+100, ievērojot, ka

$$\begin{gathered}1+100=101\\2+99=101\\3+98=101\\\ldots\\50+51=101.\end{gathered}$$

Tātad

$$\begin{aligned}&1+2+\ldots+99+100=\\&=101\cdot50=5050,\end{aligned}$$

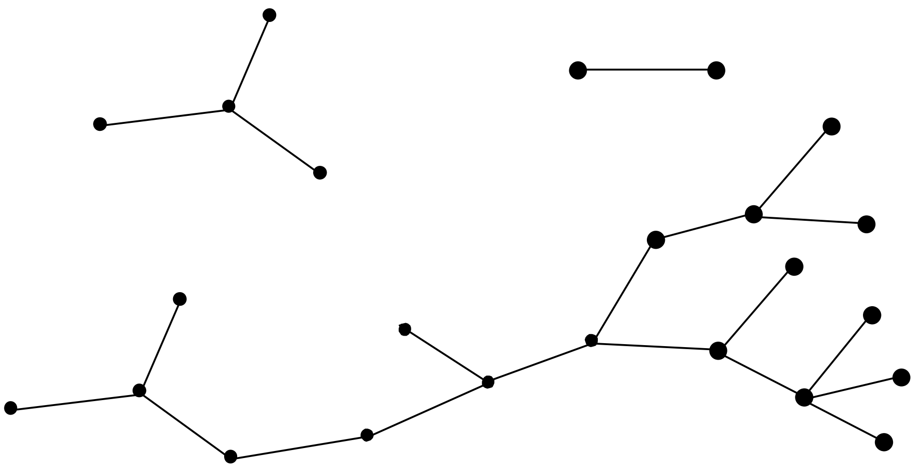
bet 5050:4=1263,5, kas nav vesels skaitlis.

9. Atbilde. Skat., piemēram, 209. zīmējumu.

X	X	X	X	X	X
X	X	X		X	X
			X		
X	X	X	X		
X					X

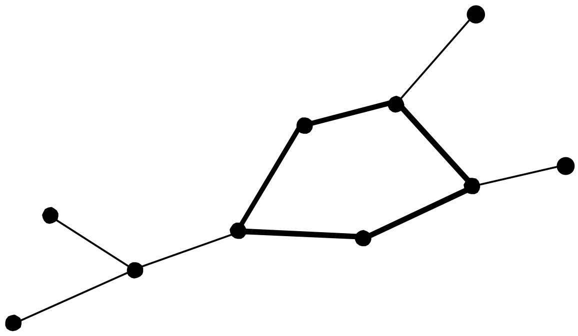
209. zīm.

10. Risinājums. Aplūkosim dažus specifiskus celiņu tīklus (skat. 210. zīm.).



210. zīm.

Tie raksturojas ar īpašību, ka nesatur noslēgtus maršrutus, kā, piemēram, 211. zīmējumā attēlotais celiņu tīkls.



211. zīm.

Šādus noslēgtus maršrutus īsuma pēc sauksim par cikliem.

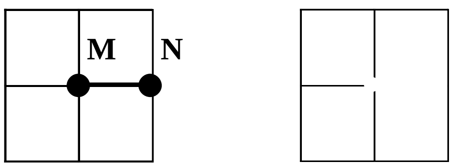
Skaidrs, ka zīmējumā parādīto celiņu tīklu gadījumos pat <u>viens</u> ķērājs var panākt bēdzēju: viņš vienkārši visu laiku virzās uz bēdzēja pusi, un pēdējam agri vai vēlu, nonākot celiņa galapunktā, vairs nav kur atkāpties.

Savukārt, zīmējumā attēlotajā celiņu tīklā, kur bēdzējs var skriet pa ciklu, viena figūra nevar noķert otru, ja to pārvietošanās ātrumi ir vienādi vai ja figūra, kas ķer, pārvietojas lēnāk par otru.

Tagad atgriezīsimies pie mūsu parka celiņiem. Kā redzam, tad ciklu tur ir vairāk nekā viens, tātad ar vienu ķērāju noteikti nepietiks. Vai pietiks ar diviem ķērājiem?

Ja mēs vienu ķērāju izmantosim tam, lai izjauktu visus ciklus dotajā grafā, tad otrs ķērājs agri vai vēlu panāks bēdzēju neatkarīgi no abu skriešanas ātruma.

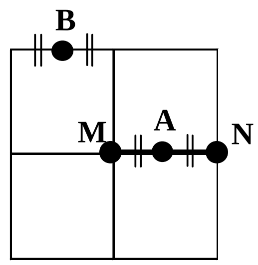
Ja no mūsu uzdevumā dotā celiņu tīkla mēs izgrieztu nogriezni MN, tad ciklu vairs nebūtu (skat. 212. zīm.).



212. zīm.

Mūsu plāns – viens ķērājs jānovieto uz nogriežņa MN tā, lai Jānis, no jebkuras vietas tuvojoties nogrieznim MN, nonāktu tur novietotā ķērāja rokās.

Novietosim vienu ķērāju, piemēram, Andri, MN viduspunktā A (skat. 213. zīm.):

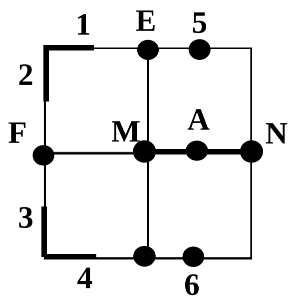


213. zīm.

Mēs zinām, ka Jānis skrien 3 reizes ātrāk nekā Andris un Aivars.

Pieņemsim, ka viņš atrodas punktā B (skat. 213. zīm.). Ja Andris un Jānis reizē sāk skriet uz punktu M pa taisnāko ceļu, viņi punktā M nonāk reizē, jo attālums no B līdz M ir 3 reizes garāks nekā attālums no A līdz M.

Ja Jānis atrodas kādā no iezīmētajām daļām (skat. 214. zīm.; 1, 2, 3, 4, 5, 6 ir atbilstošo nogriežņu viduspunkti),



214. zīm.

Andris netiek klāt Jānim šajos posmos. Bet, ja Jānis pārkāpj kādu no punktiem 1, 2, 3, 4, tad Andris skrien uz punkta M pusi ar 3 reizes mazāku ātrumu nekā Jānis. Ja Jānis no E, F vai G arī dodas uz punktu M, tad Andris to šajā punktā noķer. Ja Jānis sāk attālināties no M, to pašu dara arī Andris tā, lai visu laiku atrastos no M trīs reizes mazākā attālumā nekā Jānis; Andris visu laiku paliek uz MN. Ja Jānis pēc E vai G šķērsošanas dodas uz punkta N, nevis punkta M pusi, tas ir, skrien tālāk uz labo pusi , tad Andris sāk skriet uz N pusi un noķer Jāni punktā N (ievēro, ka Andris bija noskrējis $\frac{1}{3}$ no attāluma AM un sāka skriet to pašu ceļu atpakaļ un tālāk uz punktu N).

Tātad Andrim izdosies izolēt no Jāņa nogriezni MN, pārvēršot parka celiņu tīklu bez cikliem; šādā tīklā savukārt Aivars noķers Jāni.

Ievērosim, ka apskatītajā ķeršanas procesā Andris ir punktā A tajos brīžos, kad Jānis ir kādā no punktiem 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Atliek jautājums – vai Andris un Aivars var "iedzīt" Jāni vienā no zīmējumā attēlotajiem apgabaliem vai arī punktā 5 vai 6 tā, lai Andris šajā brīdī atrastos punktā A?

Andris nostājas punktā A, bet Aivars – punktā M. Aivars dodas uz Jāņa pusi, neejot pa nogriezni MN, pa taisnāko ceļu. Viegli pārliecināties, ka Jānim jāieskrien vai nu punktā 5 vai 6, vai kādā no apgabaliem 1-2, 3-4.

Līdz ar to uzdevums atrisināts.

11. Atbilde. a) Jā, dalās;

b) nē, nedalās.

Risinājums. a) Skaitļu no 1 līdz 76 ieskaitot reizinājums dalās ar 77 tādā gadījumā, ja tas dalās ar visiem skaitļa 77 pirmreizinātājiem. Kādi tie ir?

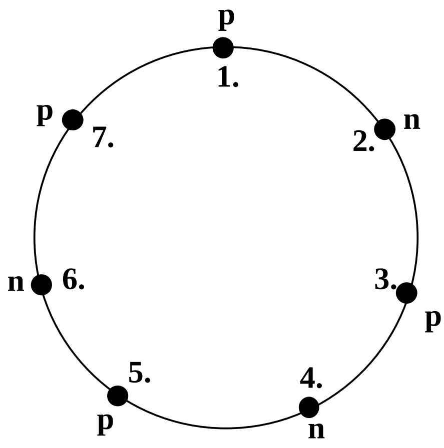
$$77=7\cdot 11$$

Reizinājums $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 76$ satur reizinātājus 7 un 11, tātad tas dalās ar 77.

b) Skaitļu no 1 līdz 76 ieskaitot reizinājums dalās ar 101 tādā gadījumā, ja tas dalās ar visiem skaitļa 101 pirmreizinātājiem.

Skaitlis 101 ir pirmskaitlis, bet reizinājums $1\cdot 2\cdot \ldots \cdot 100$ nesatur reizinātāju 101, tātad nedalās ar 101.

12. I Pierādījums. Pieņemsim pretējo: blakus skaitļu, kuru reizinājums būtu pozitīvs, nav. Tad pamīšus jāizvietojas pozitīviem un negatīviem skaitļiem. Pieņemot, ka 1. pozīcijā ievietojas pozitīvs skaitlis, iegūstam 215. zīmējumā parādīto ainu (ar p apzīmēti pozitīvi, ar n – negatīvi skaitļi).



215. zīm.

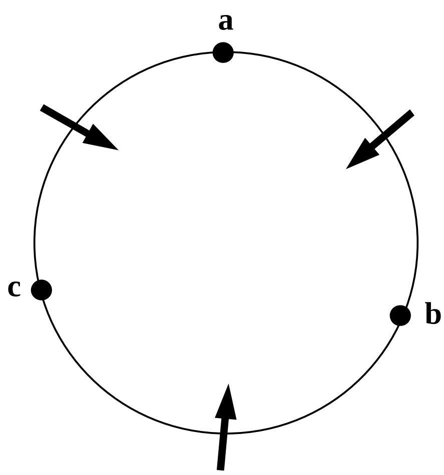
Redzam, ka 1. un 7. pozīcijā blakus atrodas pozitīvi skaitļi, tātad to reizinājums ir pozitīvs. Tātad mūsu pieņēmums ir nepareizs.

Gadījumu, kad 1. pozīcijā atrodas negatīvs skaitlis, analizē līdzīgi.

Uzdevums atrisināts.

<u>**II Pierādījums**</u>**.** Kopējais skaitļu skaits ir nepāra skaitlis. Tāpēc vai nu pozitīvu, vai negatīvu skaitļu ir vairāk.

Pieņemsim, ka pozitīvu skaitļu ir vairāk; tad to ir vismaz 4. Izvēlēsimies no dotajiem 7 skaitļiem četrus pozitīvus skaitļus; trīs pārējos skaitļus apzīmēsim ar a; b; c. Izvietosim vispirms uz riņķa līnijas skaitļus a; b; c (skat. 216. zīm.).

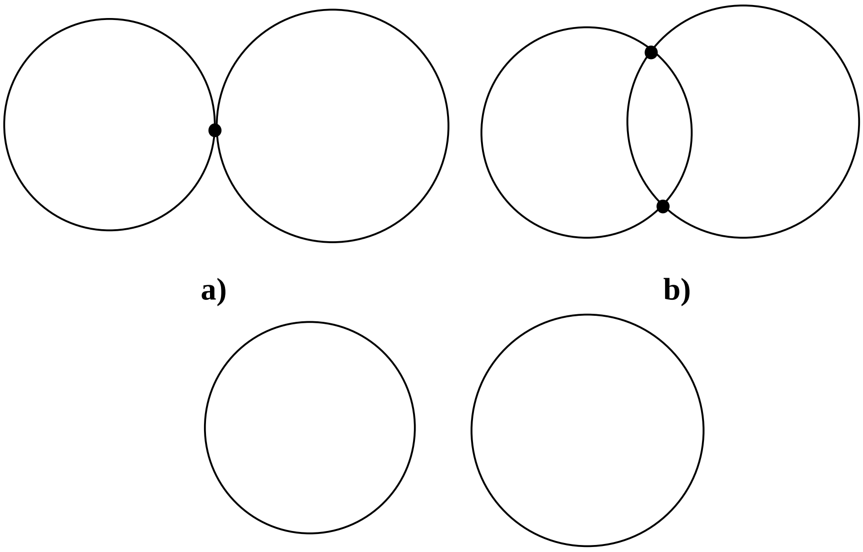


216. zīm.

Mūsu izvēlētajiem 4 pozitīvajiem skaitļiem jāievietojas trijās ar bultiņām parādītajās atstarpēs. Tā kā šo skaitļu ir vairāk nekā atstarpju, tad kādā atstarpē nonāks vismaz divi pozitīvi skaitļi; šajā atstarpē divi pozitīvi skaitļi atradīsies blakus, un to reizinājums būs pozitīvs.

Gadījumu, kad starp 7 skaitļiem vairāk ir negatīvu skaitļu, apskata līdzīgi.

<u>13. Pierādījums</u>. Divām riņķa līnijām ir vai nu viens kopīgs punkts, ja tās saskaras (skat. 217. a) zīm.), divi kopīgi punkti, ja tās krustojas (skat. 217. b) zīm.), vai arī neviena kopīga punkta, ja tās nesaskaras un nekrustojas (skat. 217. c) zīm.).



a) **b)**

c)

217. zīm.

Tātad divām dažādām riņķa līnijām kopīgo punktu nav vairāk par 2. Bet tas nozīmē, ka desmit dažādām riņķa līnijām kopīgo punktu ir ne vairāk kā $2\cdot(9+8+\ldots+2+1+0)=90$. Paskaidrosim, kāpēc tā ir. Pirmajai riņķa līnijai būs kopīgi punkti ar ne vairāk kā 9 citām riņķa līnijām. Otrajai riņķa līnijai kopīgos punktus ar pirmo riņķa līniju vairs neskaitīsim (tie jau ir ieskaitīti), tātad jauni kopīgi punkti tai būs ar ne vairāk kā 8 riņķa līnijām, trešajai ar 7 utt., līdz beidzot desmitajai riņķa līnijai jaunu kopīgu punktu vairs nebūs ne ar vienu citu. Katrām divām riņķa līnijām kopīgo punktu būs ne vairāk par 2, tātad kopā to būs ne vairāk kā $2\cdot(9+8+\ldots+2+1+0)=90$.

Ja Andris ir atradis 91 dažādu punktu, tas nozīmē, ka vismaz divas riņķa līnijas sakrīt.

14. I Pierādījums. Apzīmēsim dienas ar skaitļiem no 1 līdz 5. Izveidosim visus iespējamos skaitļu pārus no šiem pieciem skaitļiem, veidojot tos no dažādiem skaitļiem un uzskatot, ka skaitļu kārtība nav svarīga, t. i., 12 būs tas pats, kas 21: 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45. Ieguvām desmit dažādus skaitļu pārus. Tā kā mums ir desmit rūķīši, tad katram rūķītim varam piekārtot vienu skaitļu pāri. Šis skaitļu pāris apzīmē tās dienas, kad rūķītis sēdēs mājās.

Viegli pārbaudīt, ka katriem diviem rūķīšiem A un B ir gan tāda diena, kad A ir mājās, bet B nav (tātad B apciemo A), gan tāda diena, kad B ir mājās, bet A nav (tātad A apciemo B). Piemēram, rūķītis (13) apciemo rūķīti (23) 2. dienā, bet rūķītis (23) apciemo rūķīti (13) 1. dienā utt.

II Pierādījums. Skat. tabulu 218. zīmējumā. Katrs no 10 rūķīšiem divas dienas sēž mājās (skat. iekrāsotās rūtiņas), bet trijās pārējās dienās apciemo visus mājās sēdētājus.

	1. diena	**2. diena**	**3. diena**	**4. diena**	**5. diena**
1. rūķītis	**5; 6; 7; 8; 9**	**2; 3; 4;10**			
2. rūķītis	**5; 6; 7; 8; 9**		**1; 3; 4; 10**		
3. rūķītis	**6; 7; 8; 10**			**1; 2; 4; 5; 9**	
4. rūķītis	**7; 8; 9; 10**				**1; 2; 3; 5; 6**
5. rūķītis		**3; 4; 8; 9**	**1; 6; 7; 10**		
6. rūķītis		**3; 4; 8; 10**		**1; 2; 5; 7; 9**	
7. rūķītis		**4; 8; 9; 10**			**1; 2; 3; 5; 6**
8. rūķītis			**3; 4; 6; 10**	**1; 2; 5; 7; 9**	
9. rūķītis			**3; 4; 7; 10**		**1; 2; 5; 6; 8**
10. rūķītis				**4; 5; 7; 9**	**1; 2; 3; 6; 8**

218. zīm.

Redzam, ka ar 5 dienām pietiek, lai katrs rūķītis varētu apciemot katru citu.

15. Atbilde. a) Nē, nevar;

b) jā, var, skat., piemēram, 219. zīm.

X	X	X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X		
X	X	X	X	X			
							X
						X	X
					X	X	X

219. zīm.

Risinājums. a) Ja katrā kolonnā būs 3 krustiņi, tad kopā būs $3\times8=24$ krustiņi; ja visās rindiņās krustiņu skaits ir dažāds, tad kopā būs ne mazāk par $0+1+2+\ldots+7=28$ krustiņiem. Bet $24<28$, tātad ar šādiem noteikumiem krustiņus iezīmēt nevarēsim.

16. Atbilde. Pirmskaitļu starp apskatāmajām summām nav vairāk par 2.

Risinājums. Tā kā a, b, c – dažādi naturāli skaitļi, tad visas apskatāmās summas ir ne mazākas par $1+2=3$; tātad tās nevar būt 2. Visi pirmskaitļi, izņemot 2, ir nepāra skaitļi $a+b$, $a+c$, $b+c$, kas ir pirmskaitļi, noteikti ir nepāra skaitļi. Vismaz diviem no skaitļiem a; b; c ir vienāda paritāte (tie abi vienlaicīgi ir vai nu pāra, vai nepāra skaitļi).

Šo skaitļu summa ir pāra skaitlis un tātad nav pirmskaitlis. Tātad pirmskaitļu starp apskatāmajām summām nav vairāk par 2.

Piemērs: $a=2$; $b=3$; $c=5$ parāda, ka 2 pirmskaitļi var būt ($2+3=5$; $2+5=7$).

Tātad meklējamais maksimums ir 2.

17. I Pierādījums. No dotā seko, ka $x^2+x=1$. Tāpēc

$$x^4+x^3+x-1=$$
$$=x^2(x^2+x)+x-1=$$
$$=x^2\cdot 1+x-1=$$
$$=x^2+x-1=$$
$$=0.$$

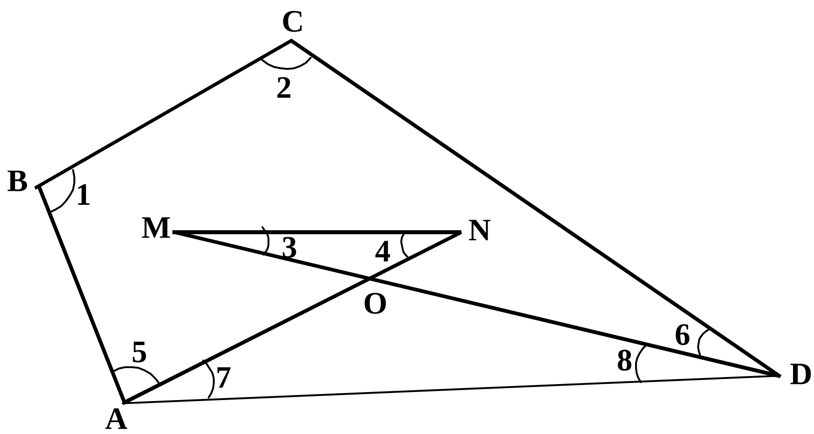
II Pierādījums. Sadalot reizinātājos, iegūstam

$$x^4+x^3+x-1=$$
$$=(x^4-1)+(x^3+x)=$$
$$=(x^2-1)(x^2+1)+x(x^2+1)=$$
$$=(x^2+1)(x^2+x-1),$$

no kurienes uzreiz seko uzdevuma apgalvojums.

18. Atbilde. Atzīmēto leņķu lielumu summa ir 360°.

Risinājums. Apskatīsim 220. zīmējumu.



220. zīm.

Trijstūru MON un AOD leņķu summa ir 180°; $\angle MON=\angle AOD$.

Tāpēc $\angle 3+\angle 4=\angle 7+\angle 8$. Iegūstam, ka

$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6=$
$=\angle 1+\angle 2+\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=$
$=\angle 1+\angle 2+(\angle 5+\angle 7)+(\angle 6+\angle 8)=$
$=\angle B+\angle C+\angle A+\angle D=$
$=360°$,

jo četrstūra ABCD leņķu lielumu summa ir 360°.

19. Pierādījums. Ja starp šiem 10 cilvēkiem katrs pazīst katru, varam izvēlēties jebkurus četrus no viņiem.

Pieņemsim, ka A un B viens otru nepazīst. Liksim, lai A un B uzdāvina pa ziedam visiem saviem paziņām; kopā tiks uzdāvināti vismaz 10 ziedi, un tie tiks pasniegti 8 cilvēkiem. Katrs no šiem 8 cilvēkiem saņems ne vairāk kā 2 ziedus (pa vienam no A un B), tāpēc vismaz 10-8=2 cilvēki saņems divus ziedus; šie cilvēki X un Y pazīst gan A, gan B. Varam izveidot ap galdu sēdošo cilvēku secību AXBY.

20. Pierādījums. Pieņemsim pretējo uzdevumā prasītajam, tātad pieņemsim, ka uz katras taisnes, uz kuras atrodas viena astoņstūra mala, ir vismaz vēl otra. Sauksim šādas taisnes par īpašām. Ņemsim vienu īpašu taisni t. Uz tās ir vismaz četri malu galapunkti, jo uz taisnes t atrodas vismaz divas daudzstūra malas. Tātad taisni t krusto vēl vismaz 4 īpašas taisnes, jo katra no daudzstūra virsotnēm pieder divām tā malām. Tāpēc kopā būtu vismaz 5 īpašas taisnes. Uz katras īpašas taisnes ir vismaz 2 malas, tāpēc kopā būtu vismaz (4+1)·2=10 malas. Rodas pretruna, jo astoņstūrim ir tikai 8 malas. Tātad var atrast tādu taisni, kura satur tikai vienu daudzstūra malu.

21. Pierādījums. No dotā seko, ka $\frac{p^2}{4} \geq q > 0$ un $\frac{a^2}{4} \geq b > 0$, jo abu doto kvadrātvienādojumu diskriminanti nav negatīvi. No šīm nevienādībām seko

$$\frac{p^2}{4} \cdot \frac{a^2}{4} \geq q \cdot b$$

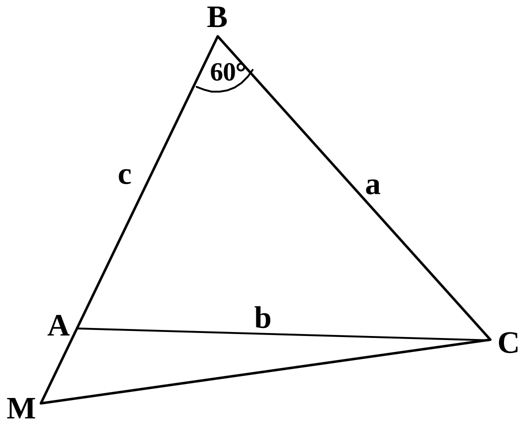
(viena tipa nevienādības ar pozitīviem locekļiem var reizināt).

Bet trešā kvadrātvienādojuma diskriminants ir

$$D = \left(\frac{ap}{2}\right)^2 - bq = \frac{a^2 p^2}{4} - bq > \frac{a^2 p^2}{16} - bq \geq 0,$$

tātad D>0; tātad šim vienādojumam ir 2 saknes.

<u>22. I Pierādījums</u>. Apskatām 221. zīmējumu.



221. zīm.

Tā kā trijstūra leņķu summa ir 180°, tad abu pārējo leņķu lielumu summa ir 120°; tā kā visas malas ir dažādas, tad arī visi leņķi ir dažādi, un viens no tiem mazāks par 60°, bet otrs – lielāks. Tā kā pret lielāko malu atrodas lielākais leņķis, tad ∠A>60°, ∠B=60°, ∠C<60°.

Papildinām ΔABC līdz regulāram trijstūrim MBC (to var izdarīt, pagarinot malu AB un atliekot BM=a; tad ΔMBC ir vienādsānu ar virsotnes leņķi 60°, tātad regulārs). Tad ∠BMC=60°, MC=BC=a, AC=b, MA=MB-AB=a-c. Redzam, ka ΔMAC apmierina uzdevuma prasības.

<u>II Pierādījums</u>. Saskaņā ar doto viegli pārliecināties, ka a+b>a-c, a+a-c>b, b+a-c>a; tātad no nogriežņiem ar garumiem a; b; a-c var izveidot trijstūri. Kā 1. risinājumā pārliecināmies, ka 60° lielākais leņķis sākotnējā trijstūrī ir pret malu b; tāpēc pēc kosinusu teorēmas

$$b^2=a^2+c^2-ac \ \mathbf{(1)}.$$

Pārliecināmies, ka jaunizveidotajā trijstūrī pret malu ar garumu b arī atrodas 60° liels leņķis.

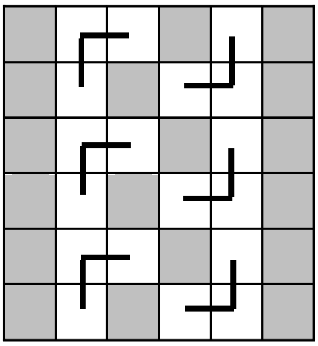
Tiešām, saskaņā ar kosinusu teorēmu mums jāpārbauda vienādība

$$b^2=a^2+(a-c)^2-a(a-c),$$

kas pēc elementāriem pārveidojumiem izrādās ekvivalenta ar pareizo vienādību (1).

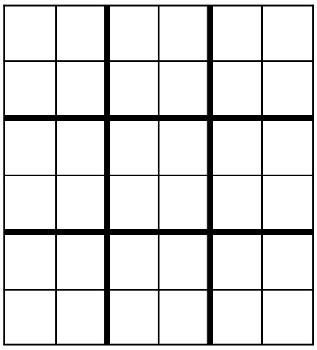
23. Atbilde. Mazākais "stūrīšu" daudzums ir 6.

Risinājums. Kā redzams 222. zīmējumā, pietiek ar 6 stūrīšu izgriešanu. Neizgrieztās rūtiņas iekrāsotas.



222. zīm.

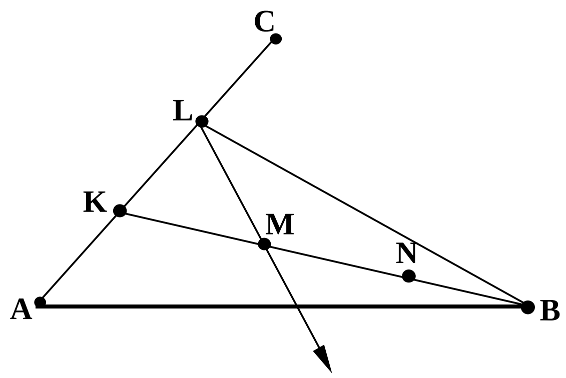
Ja izgrieztu mazāk par 6 stūrīšiem (t. i., ne vairāk par 5 stūrīšiem), tad tiktu izgrieztas ne vairāk par $5 \cdot 3 = 15$ rūtiņām; tātad neizgrieztas paliktu vismaz $36-15=21$ rūtiņas. Tās kaut kā sadalās pa deviņiem 223. zīmējumā redzamajiem kvadrātiem ar izmēriem 2×2. Tā kā $21 > 9 \cdot 2 = 18$, tad kādā no šiem 2×2 rūtiņu kvadrātiem būs vismaz 3 neizgrieztas rūtiņas; tās veido vismaz vienu vēl izgriežamu stūrīti.



223. zīm.

Tātad meklējamais minimums ir 6.

24. Risinājums. Pieņemsim, ka jāatrod AB viduspunkts (skat. 224. zīm.). Rīkojamies šādi.



224. zīm.

Novelkam nogriezni AC. Ar trisektoru sadalām to trīs vienādās daļās AK, KL, LC. Apskatām ΔALB; BK ir šī trijstūra mediāna. Ar trisektoru sadalām KB trīs vienādās daļās KM, MN, NB; punkts M, kas dala mediānu attiecībā 2:1, skaitot no virsotnes, ir ΔABL mediānu krustpunkts. Tāpēc taisne LM satur šī trijstūra mediānu; tāpēc taisnes LM krustpunkts ar AB ir nogriežņa AB viduspunkts, ko vajadzēja atrast.

25. I Pierādījums. a) Ja n – pāra skaitlis, tad reizinātājs n un reizē ar to viss reizinājums dalās ar 2; ja n – nepāra skaitlis, tad reizinātājs 13n+1 ir pāra skaitlis, tāpēc tas un arī viss reizinājums dalās ar 2;

b) ņemot vērā **a)**, vēl jāpierāda, ka n·(13n+1)·(19n+2) dalās ar 3; šķirosim gadījumus atkarībā no tā, kādu atlikumu dod n, dalot ar 3:

b1) ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 0, tad n=3k, kur k – vesels skaitlis; tad reizinātājs n un līdz ar to arī viss reizinājums dalās ar 3;

b2) ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 1, tad n=3k+1, kur k – vesels skaitlis; tad 19n+2=19(3k+1)+2=57k+21=3(19k+7) dalās ar 3, tāpēc arī viss reizinājums dalās ar 3;

b3) ja n, dalot ar 3, dod atlikumu 2, tad n=3k+2, kur k – vesels skaitlis; tad 13n+1=13(3k+2)+1=39k+27=3(13k+9) dalās ar 3, tāpēc arī viss reizinājums dalās ar 3.

Visi gadījumi aplūkoti, uzdevums atrisināts.

II Pierādījums. Ievērosim, ka

$$n\cdot(13n+1)\cdot(19n+2)=$$

$$=n\cdot(13n+1)\cdot(18n+(n+2))=$$

$$=18n\cdot n\cdot(13n+1)+n\cdot(n+2)\cdot(13n+1)=$$

$$=18n\cdot n\cdot(13n+1)+n\cdot(n+2)\cdot(12n+(n+1))=$$

$$=18n\cdot n\cdot(13n+1)+12n\cdot n\cdot(n+2)+n\cdot(n+1)\cdot(n+2).$$

Abi pirmie saskaitāmie acīmredzami dalās ar 6. Saskaitāmais $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ ir triju pēc kārtas ņemtu veselu skaitļu reizinājums; tieši viens no tiem dalās ar 3 un vismaz viens - ar 2, tātad arī $n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$ dalās ar 6, kas bija jāpierāda.