Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 46. OLIMPIĀDE

5. klase

46.1. Ar kādu ciparu beidzas skaitlis

a) 1+2+3+...+100?

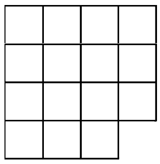
b) 1+2+3+...+1995+1996?

46.2. Vai zīm. parādīto, no 15 kvadrātiņiem sastāvošo figūru var sagriezt

a) trīs vienādās daļās;

b) četrās vienādās daļās?

Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.



46.3. Četrciparu skaitļa pēdējo ciparu pārcēla uz skaitļa sākumu. Iegūtais skaitlis bija 6 reizes mazāks par sākotnējo. Vai tā var būt?

46.4. Kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas ierakstīt katrā rūtiņā pa naturālam skaitlim, kas nepārsniedz 20 (tiem visiem jābūt dažādiem) tā, lai visās rindiņās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu reizinājumi būtu vienādi. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

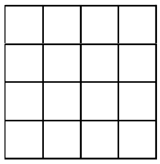
46.5. Uzrādīt 8 monētu komplektu, kuru izmantojot, var samaksāt jebkuru naudas summu no 1 santīma līdz 1 latam ieskaitot. (Maksāšana notiek bez naudas izdošanas. Pieejamas monētas 1s, 2s, 5s, 10s, 20s, 50s, 1Ls, 2Ls vērtībā.)

6. klase

46.6. No Smaragda pilsētas uz Rubīna pilsētu ved ceļš 1996 km garumā. Gar to uzstādīti ceļa stabi ar plāksnītēm, kas norāda attālumus līdz abām pilsētām: (0, 1996), (1, 1995), (2; 1994), utt. Vai ir tāds stabs, uz kura abi skaitļi dalās ar 7?

46.7. Vai kuba šķautnes var sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 12 (katru šķautni ar citu skaitli) tā, lai katru tādu triju šķautņu numuru summa, kas iziet no vienas virsotnes, dalītos ar 3?

46.8. Kādu lielāko daudzumu trijstūru var iezīmēt zīmējumā paredzētajā režģī, lai visu trijstūru virsotnes atrastos rūtiņu virsotnēs un nekādiem diviem trijstūriem nebūtu kopīgu punktu?

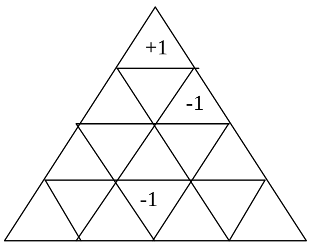


46.9. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Tas pilnībā pārklāts ar 18 taisnstūriem, katram no kuriem izmēri ir 1×2 rūtiņas. Aplūkojam tos 6 taisnstūrus, kas pārklāj vienas diagonāles rūtiņas. Pierādīt, ka 3 no tiem vērsti no šīs diagonāles uz vienu pusi, bet 3 – uz otru.

46.10. Septiņu dažādu naturālu skaitļu summa ir 100. Pierādīt, ka no tiem var atrast tādus trīs, kuru summa nav mazāka par 50.

7. klase

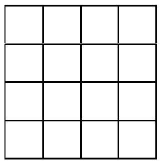
46.11. Ierakstīt katrā no tukšajiem trijstūrīšiem zīmējumā vai nu “+1”, vai “-1” tā, lai katrā trijstūrītī ierakstītais skaitlis būtu vienāds ar visu to skaitļu reizinājumu, kas ierakstīti blakus trijstūrīšos. (Trijstūrīšus sauc par blakus trijstūrīšiem, ja tiem ir kopīga mala.) Pietiek atrast vienu veidu, kā to izdarīt.



46.12. Cik ir dažādu monomu, kam koeficients ir 1, pakāpe 7 un kas satur mainīgos x, y un z, katru no tiem vismaz pirmajā pakāpē? (Monomus, kas atšķiras tikai ar reizinātāju kārtību, uzskatām par vienādiem.)

46.13. Mežā dzīvo 10 rūķīši. Katru vakaru daži no viņiem sēž mājās, bet pārējie apciemo visus mājās sēdētājus. Pierādīt, ka pietiek ar piecām dienām, lai katrs rūķītis būtu apciemojis katru citu.

46.14. Kāds lielākais malu skaits var būt daudzstūrim, kura visas malas iet pa zīmējumā parādītā režģa līnijām?



46.15. Kādu lielāko daudzumu naturālu skaitļu var uzrakstīt rindā tā, lai vienlaicīgi izpildītos 2 īpašības:

a) katru četru pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa ir nepāra skaitlis,
b) katru piecu pēc kārtas uzrakstīto skaitļu summa ir pāra skaitlis?

8. klase

46.16. Dots, ka $x^2+7x = 11$, $y^2+7y = 11$ un $x \neq y$. Aprēķināt $(1+x)(1+y)$.

46.17. Dalot $1\cdot 2$ ar 3, $2\cdot 3$ ar 4, $3\cdot 4$ ar 5, atlikumā iegūst 2. Vai vienmēr, dalot divu viens otram sekojošu naturālu skaitļu reizinājumu ar nākošo naturālo skaitli, atlikumā iegūst 2?

46.18. Katra kuba skaldne sadalīta 4 vienādos kvadrātiņos. Katrs kvadrātiņš nokrāsots balts, sarkans vai zaļš, pie tam katri divi kvadrātiņi, kam kopīga mala, nokrāsoti dažādās krāsās. Vai var gadīties, ka ir 7 balti, 8 sarkani un 9 zaļi kvadrātiņi?

46.19. Konferencē piedalās 10 cilvēki; katrs pazīstams ar vismaz 5 citiem. Pierādīt, ka var izvēlēties 4 cilvēkus un nosēdināt viņus ap apaļu galdu tā, lai katram abās pusēs sēdētu paziņas. (uzskatām: ja A pazīstams ar B, tad B pazīstams ar A.)

46.20. Kāds lielākais malu skaits var būt izliektam daudzstūrim, kura visu leņķu lielumi izsakās ar veseliem skaitiem grādu?

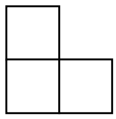
9. klase

46.21. Kādas ir tās a vērtības, pie kurām vienādojumiem $x^2-6x+a=0$ un $x^2-2ax+25=0$ kopā ir tieši 3 dažādas saknes? Vienādojumiem nav kopīgu sakņu?

46.22. a) Pierādīt, ka katru 499 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 1996.

b) Vai katru 498 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums dalās ar 1996?

46.23. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Kādu mazāko daudzumu tādu "stūrīšu", kāds redzams 46.1. zīm., var no tā izgriezt, lai no atlikušās kvadrāta daļas vairs nevarētu izgriezt nevienu "stūrīti"?



46.1. zīm.

46.24. Taisnleņķa trijstūra katetes ir a un b, hipotenūza c, laukums S un pusperimetrs p. Pierādīt, ka

$$p(p-c) = (p-a)(p-b) = S$$

46.25. Robots "Robis" prot paņemt no plaukta trīs blakus stāvošas grāmatas un tādā pašā kārtībā nolikt citā vietā.

a) plaukta stāv 5 grāmatas secībā *ABCDE*. Kā robots var iegūt secību *BACDE* ?

b) plauktā stāv 1996 grāmatas. Pierādīt, ka robots var iegūt jebkuru grāmatu secību.

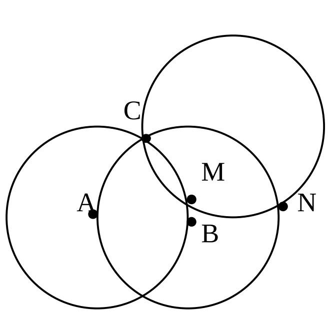
10. klase

46.26. Vai pastāv tādi pozitīvi skaitļi $a, b, c,$ ka $a+b+c = a^2+b^2+c^2 = 1$?

46.27. Daudzstūris ievilkts riņķī. Visi tā leņķi savā starpā vienādi, bet starp tā malām ir arī dažādas. Pierādīt, ka daudzstūrim ir pāra skaits virsotņu.

46.28. a) atrast kaut vienu n ar īpašību: jebkuru pēc kārtas ņemtu n naturālu skaitļu summa dalās ar 1996,

b) atrast vismazāko n, kam piemīt a) punktā minētā īpašība.



46.2. zīm.

46.29. Trīs vienādas riņķa līnijas iet caur punktu C; divas no tām (ar centriem A un B) iet atbilstoši caur B un A. Trešā riņķa līnija krusto abas minētās punktos M un N (skat. 46.2. zīm.). Pierādīt, ka $AB \parallel MN$.

46.30. Bērnudārza grupā ir 10 bērni; katrs draudzējas tieši ar 5 citiem. Pierādīt, ka bērnus pastaigai var sakārtot pāros tā, ka katrā pārī būs bērni, kas viens ar otru draudzējas. (Uzskatām: ja *A* draudzējas ar *B*, tad arī *B* draudzējas ar *A*.)

11. klase

46.31. Dots, ka $x+y+z=0$. Pierādīt, ka $x^3+y^3+z^3=3xyz$.

46.32. Divas riņķa līnijas krustojas punktos M un N. Uz vienas no tām ārpus otras ņemts punkts K. Taisnes KM un KN krusto otru riņķa līniju atbilstoši punktos A un B tā, ka M atrodas starp A un K, bet N -- starp B un K. Pierādīt, ka taisne AB paralēla pirmā riņķa līnijas pieskarei punktā K.

46.33. Dots, ka a un b -- naturāli skaitļi. Zināms, ka eksistē tāds naturāls n, ka $an+b$ dalās ar 2, un eksistē tāds naturāls m, ka $am+b$ dalās ar 3. Pierādīt, ka eksistē tāds naturāls k, ka $ak+b$ dalās ar 6.

46.34. Regulāra trijstūra laukums ir $9\,cm^2$. Caur tā centru novilkta taisne, kas to sadala divās daļās: trijstūrī un četrstūrī.

46.35. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām; 33 rūtiņās ievietots pa zvaigznītei. Pierādīt, ka var atrast tādas 5 zvaigznītes, no kurām nekādas divas neatrodas ne vienā rindā, ne vienā kolonnā.

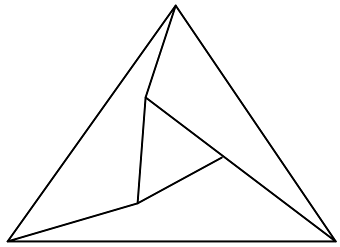
12. klase

46.36. Pierādīt, ka visiem x pastāv nevienādība

$$\sin^2 x + \cos^4 x \geq \frac{3}{4}.$$

46.37. Dots, ka n -- pirmskaitlis, $n>5$. Pierādīt, ka n^4-5n^2+4 dalās ar 45.

46.38. Vai 46.3.zīm. var būt attēlota daudzskaldņa paralēlā projekcija plaknē? (Nekādu neredzamu šķautņu nav.)



46.3. zīm.

46.39. Riņķa līnijā ar rādiusu R ievilkts četrstūris, kura malu garumi ir $a; b; c; d$, diagonāļu garumi ir e un f un diagonāles ir savstarpēji perpendikulāras. Pierādīt, ka

$$R \geq \sqrt{\frac{abcd}{ef}}.$$

46.40. Katrs no 100 studentiem atnāca uz kafejnīcu, brīdi tajā uzkavējās un aizgāja. Ir zināms: starp katriem trim studentiem var atrast vismaz divus, kas kafejnīcā sastapās. Pierādīt: var norādīt tādus divus laika momentus, ka katrs no 100 studentiem bija kafejnīcā vismaz vienā no šiem momentiem.