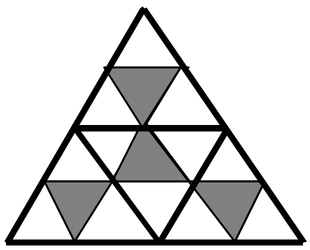
Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 47. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

47.1. Pieņemsim, ka šajā virknē katrs nākošais skaitlis lielāks par iepriekšējo. Lielāks ir tas skaitlis, kuram lielāks ir vecākās šķiras cipars. Aplūkojot pirmo otro un ceturto skaitli, iegūstam, ka $x < y < z$. Salīdzinot 2. un 3. skaitli, iegūstam $z < x$; tā ir pretruna.

47.2. Atbilde: 4. Kā to izdarīt, redzams 48.4. zīmējumā. Ar mazāk nekā četriem iekrāsotiem trijstūriem nepietiek, jo katrā no atzīmētajiem trijstūriem, kas sastāv no četriem maziem trijstūriem, vismaz vienam ir jābūt melnam; citādi centrālajam mazajam trijstūrim uzdevuma prasības neizpildās.

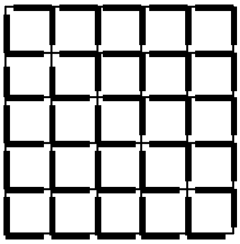


48.4. zīm.

47.3. Ja kādā šķirā rodas pārnesums, tad pašā labējā no šīm šķirām summā ir pāra cipars 0. Ja pārnesumu nav, tad summā visi nepāra cipari var būt tikai tad, ja visās šķirās saskaita pāra un nepāra ciparus, bet pāra un nepāra ciparu skaits šiem skaitļiem nevar būt vienāds, jo kopā to ir 5.

47.4. Der, piemēram, šāda monētu kopa: 1s, 2s, 2s, 5s, 10s, 20s, 20s, 50s.
Ar pirmajām 4 monētām var nomaksāt jebkuru summu no 1s līdz 9s, ar pēdējām četrām -- jebkuru summu 10s, 20s, … , 100s; tātad var samaksāt arī jebkuru divciparu skaitu santīmu.

48.5. a) jā, var. Skat 47.5. zīm.



47.5. zīm.

b) nē, to nevar izdarīt. Katrā kāsītī ir viens horizontāls un viens vertikāls posms, bet veidojamajā režģī horizontālo un vertikālo līniju garumi ir dažādi.

47.6. Doto vienādību var pārrakstīt šādi: $a+0.1b+0.01c=(10a+b):c$. Pareizinot vienādību ar 100*c*, iegūstam $100ac+10bc+c^2=1000a+100b$; tātad *c* dalās ar 10, bet tas nav iespējams, jo *c* ir cipars, kas nav 0.

47.7. Meklējamais reizinājums ir $\frac{8}{5}\cdot\frac{9}{6}\cdot\frac{10}{7}\cdot\frac{11}{8}\cdot\frac{12}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{1998}{1995}\cdot\frac{1999}{1996}\cdot\frac{2000}{1997}=\frac{1998\cdot1999\cdot2000}{5\cdot6\cdot7}$, kas nav vesels skaitlis, jo neviens no skaitītājā esošajiem reizinātājiem nedalās ar 7.

47.8. Apgalvojums seko no vienādības
$\overline{abcdef}=1000\cdot\overline{abc}+\overline{def}=1001\cdot\overline{abc}+\left(\overline{def}-\overline{abc}\right)=13\cdot77\cdot\overline{abc}+\left(\overline{def}-\overline{abc}\right)$.
No šejienes redzams, ka $\overline{abcdef}$ dalās ar 13 tad un tikai tad, kad $\overline{def}-\overline{abc}$ dalās ar 13.

47.9. Izkrāsojam kvadrāta rūtiņas šaha galdiņa kārtībā. Pieņemsim, ka minētie taisnstūri pārklāj melno diagonāli. Katrā pusē no tās balto rūtiņu ir par 3 vairāk nekā melno. Lai tās pārsegtu, nepieciešami tieši 3 taisnstūri, kas daļēji atrodas uz minētās diagonāles.

47.10. Piešķiram patvaļīgam skolēnam numuru 1; viņa draugiem -- numuru 2; šo draugu draugiem, kam vēl nav numuru, piešķiram numuru 3, utt. Ja šim procesam beidzoties, visiem skolēniem vēl nav numuru, tad izvēlamies vienu no atlikušajiem, piešķiram tam numuru 1 un atkārtojam numuru piešķiršanas procedūru.
Pēc tam uz matemātikas olimpiādi nosūtām skolēnus ar nepāra numuriem, bet uz fizikas olimpiādi -- skolēnus ar pāra numuriem.

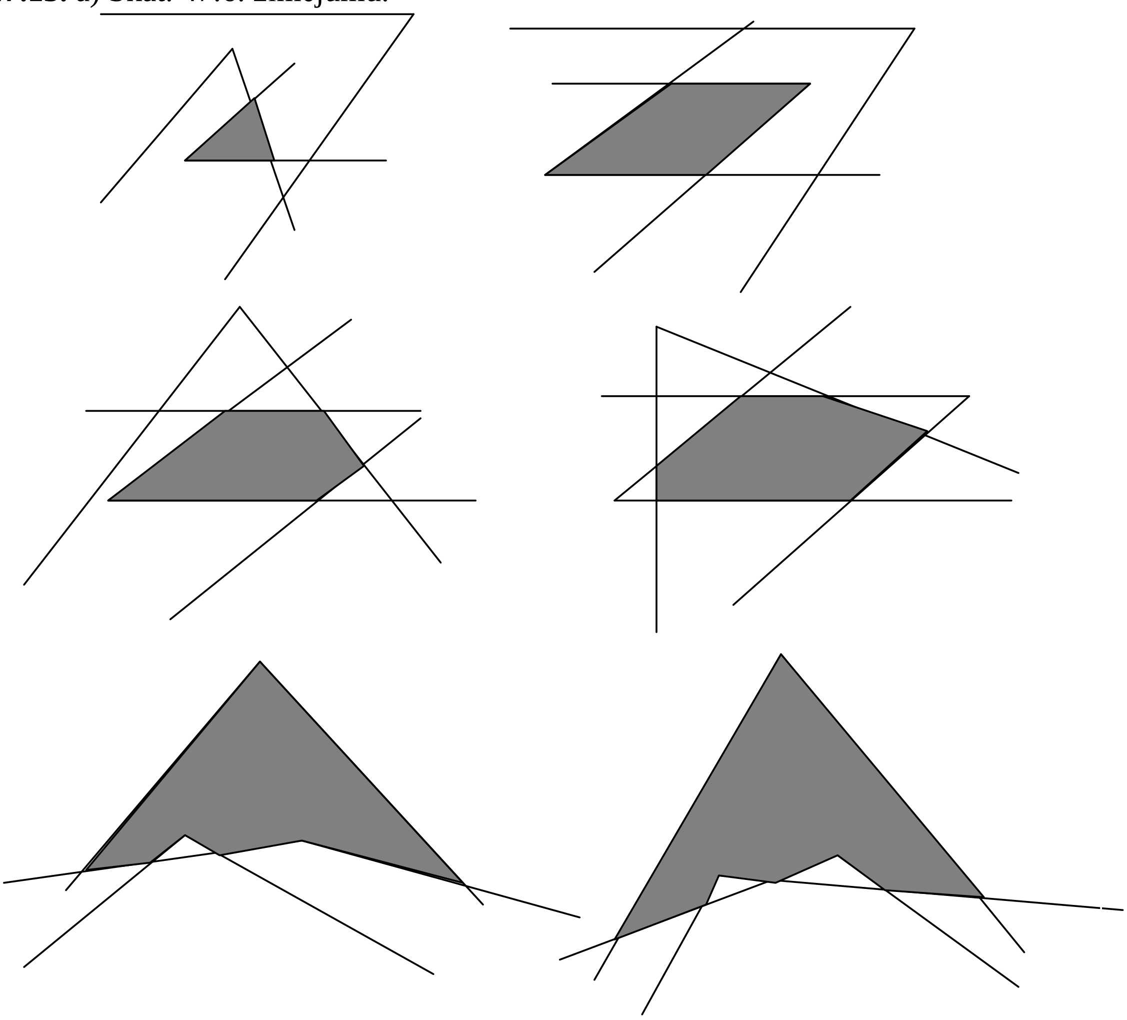
47.11. Apzīmējot Andra pastmarku skaitu ar x, iegūstam vienādojumus

$$\frac{3x-10}{x+10}=2 \quad \text{un} \quad \frac{3x-10}{x+10}=\frac{1}{2},$$

no kurienes $x=30$ un $x=6$. Tātad Jānim ir 90 vai 18 pastmarkas.

47.12. Piemērs 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1 parāda, ka var uzrakstīt 7. Skaitļus. Pierādīsim, ka 8 skaitļus (tātad arī vairāk) tā uzrakstīt nevar. Apzīmēsim šos skaitļus ar a,b,c,d,e,f,g,h. Tā kā skaitļi $a+b+c+d$ un $b+c+d+e$ ir nepāra skaitļi, tad skaitļu a un e paritātes ir vienādas (apzīmēsim $a \approx e$); tā kā skaitļi $a+b+c+d+e$ un $b+c+d+e+f$ ir nepāra skaitļi, tad skaitļu a un f paritātes ir vienādas ($f \approx a \approx e$). Līdzīgi pierāda, ka $f \approx g \approx h$. Tātad skaitļu e,f,g,h paritātes ir vienādas, un to summa ir pāra skaitlis; tā ir pretruna.

47.13. a) Skat. 47.6. zīmējumu.



47.6. zīm.

b) Šajā gadījumā daudzstūris ir izliekts, tāpēc uz katras leņķa malas atrodas augstākais viena daudzstūra mala, un daudzstūra malu skaits nepārsniedz 6; piemēros redzams, ka malu skaits var būt 3, 4, 5, 6.

47.14. Nē, nevar. Pieņemsim, ka abi mazākie skaitļi ir *a* un *b*, bet abi lielākie skaitļi ir *x* un *y*. Tad $\frac{a+b}{x}$ un $\frac{a+b}{y}$ var pieņemt tikai vērtību 1; tāpēc $x = y$, bet tā ir pretruna.

47.15. Ja iegūtajam skaitlim visi cipari būtu dažādi, tad to summa būtu $0+1+2+\cdots+9=45$; t.i., šis skaitlis dalītos ar 9. Bet tad arī skaitlim 2^n jādalās ar 9, taču 2^n ar 9 nedalās.

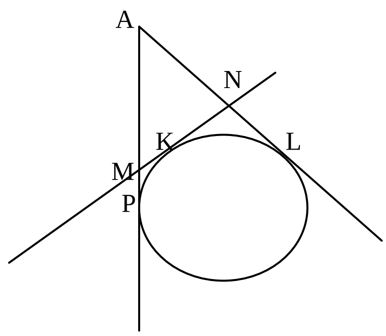
47.16. Dots, ka $x=\frac{a}{y}$, $z=\frac{c}{t}$, $y=b\cdot z$. No šejienes seko, ka $x=\frac{a}{bc}\cdot t$; tātad *x* un *t* ir tieši proporcionāli lielumi.

47.17. Lielākais malu skaits šādam daudzstūrim var būt 360; tiešām regulāram 360-stūrim visi leņķi ir 179° lieli. Izliektam *n*-stūrim ārējo leņķu summa ir $360°$. Katram ārējam leņķim jābūt vismaz $1°$ lielam; tātad $n \le 360$.

47.18. Katra aplūkojamā trijstūra perimetrs ir no *A* resp. no *B* vilkto pieskaru garumu summa (skat. 47.7. zīm.). Tiešām, no pieskaru īpašībām seko, ka

$$AM + AN + MN = (AM + MK) + (AN + NK) = (AM + MP) + (AN + NL) = AP + AL$$

Pieskaru vienādība, kas vilktas no punktiem *A* un *B*, seko no leņķu *A* un *B* vienādības (pagriežot leņķi *A*, tas attēlojas par leņķi *B*).



47.7. zīm.

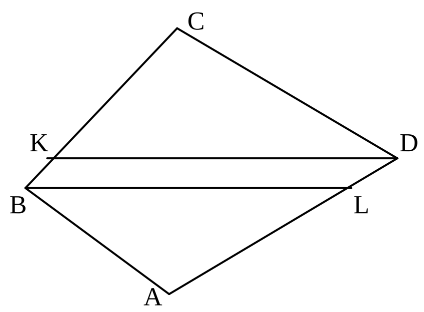
47.19. Jā, var izvēlēties piemēram šādus skaitļus: $7!\cdot 1,\ 7!\cdot 2,\ 7!\cdot 3,\ 7!\cdot 4$.

47.20. a) visu skaitļu summā katrs blakus esošo dažādu krāsu rūtiņu pāris ir ieskaitīts divas reizes; tātad visa summa ir pāra skaitlis;

b) iedomāsimies, ka vienu melnu rūtiņu pārkrāsojam baltu. Ja tā robežojusies ar x baltām un $(4-x)$ melnām rūtiņām, tad ierakstīto skaitļu summa pamazinās par $2x$ un palielinās par $2\cdot(4-x)$, t.i., mainās par skaitli $8-4x$, tātad par skaitli, kas dalās ar 4. Kad visas rūtiņas pārkrāsotas baltas, šī summa ir 0; tātad arī sākumā šī summa dalījās ar 4.

47.21. Vienam diskriminantam jābūt nullei, tātad $a=9$ vai $a=\pm 5$. Šīs vērtības jāpārbauda. Redzam, ka der tikai vērtības $a=9$ un $a=5$. Ja $a=-5$, tad viena sakne vienādojumiem sakrīt.

47.22. (Skat. 47. 7. zīm.).



47.7. zīm.

No bisektrises un kāpšļu leņķu īpašībām iegūstam
$\angle C = 180° - (\angle CKD + \angle CDK) = 180° - (\angle CBL + \angle KDA) =$
$180° - (\angle ABL + \angle BLA) = \angle A$.

47.23. a) Vai nu uz melnajiem, vai baltajiem lauciņiem atrodas vismaz 13 zirdziņi. Tie noteikti neapdraud viens otru;

b) zirdziņus uz šaha galdiņa izvietosim 12 pāros (katrā pārī viens zirdziņš apdraud otru) un vēl viens zirdziņš; ja izvēlēsimies 14 zirdziņus, tad no kāda pāra būs paņemti divi zirdziņi. Tie viens otru apdraudēs.

47.24. a) skaitli n meklēsim formā $2^a 3^b 5^c$. Tad $2^{a-1}3^b 5^c$ ir naturāla skaitļa kubs; tātad skaitļi $a-1, b$ un c dalās ar 3; skaitlis $2^a 3^{b-1} 5^c$ ir naturāla skaitļa kvadrāts; tas nozīmē, ka skaitļi a, $b-1$ un c dalās ar 2; līdzīgi iegūstam, ka skaitļi a, b, $c-1$ dalās ar 5. Redzam, ka der piemēram šādi skaitļi $a=10, b=15, c=6$.

b) var izvēlēties bezgalīgi daudz šādus skaitļus formā $2^{10}\cdot 3^{15}\cdot 5^{6}\cdot n^{30}$.

47.25. Tā kā $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM = AM^2$ un $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BN = BN^2$, tad $AM = BN$ un $BC = AC$; tas nozīmē, ka trijstūris ACB ir vienādsānu. No taisnleņķa trijstūra AMC seko, ka $\angle C = 30°$ (šaurais leņķis, kura pretkatete ir puse no hipotenūzas); tāpēc $\angle A = \angle B = 75°$.

47.26. No vienādības

$$\sqrt{a+1} - \sqrt{a} = \frac{\left(\sqrt{a+1} - \sqrt{a}\right) \cdot \left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a}\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{a+1} + \sqrt{a}\right)}$$

seko, ka

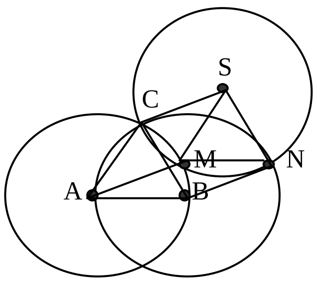
$$\sqrt{1997} - \sqrt{1996} = \frac{1}{\left(\sqrt{1997} + \sqrt{1996}\right)} < \frac{1}{\left(\sqrt{1996} + \sqrt{1995}\right)} = \sqrt{1996} - \sqrt{1995}.$$

47.27. Izsakot trijstūra laukumu divos veidos, iegūstam $a \cdot b = c \cdot h$. Aplūkosim vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a \cdot b = c \cdot h \\ a + b = c + h; \end{cases}$$

no Vjeta teorēmai apgrieztās teorēmas seko, ka $a = c$ un $b = h$, vai $a = h$ un $c = b$; taču vienādības $a = c$ un $c = b$ nav iespējamas, tāpēc aplūkojamā vienādība nav iespējama.

47.28. Apzīmēsim trešā riņķa centru ar S (skat 47.8.zīm.).



47.8. zīm.

Tad četrstūri $ACSM$ un $BCSN$ ir rombi; tāpēc $NB \parallel SC$ un $SC \parallel MA$. Tā kā bez tam $NB = NA$ (kā vienādu riņķu rādiusi), tad $AMNB$ ir paralelograms, tāpēc $MN \parallel AB$, kas arī bija jāpierāda.

47.29. a) no skaitļiem $n, n+1, n+2$ var izvēlēties skaitli $n+1$;

b) katri divi no pieciem pēc kārtas ņemtiem skaitļiem atšķiras par 1, 2, 3 vai 4. No šiem skaitļiem izvēlēsimies tādu, kurš nedalās ne ar 2, ne ar 3. Tas būs savstarpējs pirmskaitlis ar visiem pārējiem skaitļiem.

c) katri divi no pieciem pēc kārtas ņemtiem skaitļiem atšķiras par 1, 2, 3, 4, 5 vai 6. Starp tiem ir vismaz 3 nepāra skaitļi $n, n+2, n+4$. No šiem skaitļiem tikai viens var dalīties ar 3 un viens var dalīties ar 5. Atlikušais skaitlis apmierina uzdevuma nosacījumus.

47.30. Izvēlēsimies patvaļīgu cilvēku *A* un apskatīsim tā 67 draugu kopu *K*. Ņemam patvaļīgu cilvēku *B* no *K*. Ārpus kopas *K* ir tikai 33 cilvēki, tāpēc var atrast tādu cilvēku *C* no *K*. Katram no cilvēkiem *B* un *C* ārpus kopas *K* ir augstākais 33 draugi, tāpēc katram no viņiem ir vismaz 34 draugi kopā *K*. Tā kā $34+34>67$, tad kopā *K* ir cilvēks *D*, kas draudzējas gan ar *B*, gan ar *C*. Cilvēku grupa A, B, C, D der per meklējamo.

47.31. Izvēlēsimies skaitļus tā, ka izpildās nevienādības $a<b<c<d<e$. Tad dotā summa ir vienāda ar

$$|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-e|+|e-a|=b-a+c-b+d-c+e-d+e-a=2(e-a)$$

Ņemot $e=a+\frac{1}{2}\cdot 1997$, iegūstam prasīto vienādību.

47.32. Izvēlēsimies *k* tā, lai izpildītos kongruences $k \equiv n \pmod 2$ un $k \equiv m \pmod 3$. To var izdarīt, izmantojot šādu tabulu

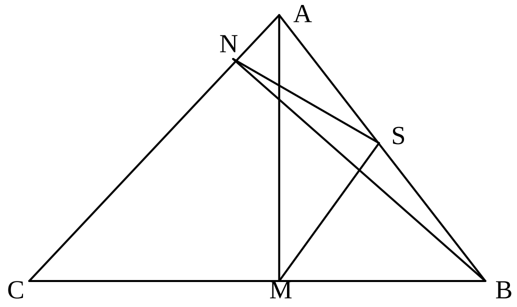
$n \pmod 2 =$	0	0	0	1	1	1
$m \pmod 3 =$	0	1	2	0	1	2
$k =$	0	4	2	3	1	5

Tad $ak+b \equiv an+b \equiv 0 \pmod 2$ un $ak+b \equiv am+b \equiv 0 \pmod 3$; tātad $ak+b$ dalās ar 6.

47.33. Ievērosim, ka

$$(2x+y)+(x+2y)=3(x+y)=3(ab+ac+cd+ad+bc+bd)=$$
$$3\cdot\frac{1}{2}\left((a+b+c+d)^2-a^2-b^2-c^2-d^2\right)=3\left(\cdot\frac{1}{2}\left(-a^2-b^2-c^2-d^2\right)\right)<0.$$

47.34. Gan *SN*, gan *SM* ir mediānas taisnlenķa trijstūrī, kura hipotenūza ir *AB* (skat. 47.9. zīm.).



47.9. zīm.

Tāpēc abi šie nogriežņi ir vienādi ar $0.5 \cdot AB$. Aplūkojot vienādsānu trijstūri *ASN*, iegūstam

$\angle NSA = 180° - 2 \cdot \angle A$; līdzīgi $\angle MSB = 190° - 2 \cdot \angle B$.

Tāpēc

$\angle NSM = 180° - (180° - 2 \cdot \angle A) - (180° - 2 \cdot \angle B) = 2 \cdot (\angle A + \angle B) - 180° =$

$2 \cdot (180° - 45°) - 180° = 90°.$

47.35. Atbilde: 999.

1) Parādīsim, kā Jānis var panākt, lai beigās palikušo skaitļu starpība būtu 999. Ar pirmo gājienu Jānis izsvītro skaitli 999. Tālāk Jānis sadala atlikušos skaitļus pāros

(1, 1000), (2, 1001), (3, 1002), … , (999, 1997). Kad Andris izsvītro kādu skaitli, Jānis sekojošajā gājienā izsvītro otru skaitli no tā paša pāra. Skaidrs, ka beigās paliks skaitļi no viena pāra; to starpība ir 999.

2) Parādīsim, ka Andris var panākt, lai beigās palikušo skaitļu starpība nepārsniedz 999. Andris ar katru gājienu svītro mazāko vēl neizsvītroto skaitli. Tā kā Andris izpilda 997 gājienus, tad skaitļi no 1 līdz 997 noteikti būs izsvītroti. Lielākā iespējamā starpība starp atlikušajiem skaitļiem ir $1997 - 998 = 999$.

47.36. Vienādojumu pārveidojam

$$\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$$

$$2\sin x \cos 2x + 2\sin x \cos x = 0$$

$$2\sin x \cdot (\cos x + \cos 2x) = 0$$

$$\sin x \cdot (2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0,$$

no kurienes $x = \pi n, \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \; (n, k \in Z)$.

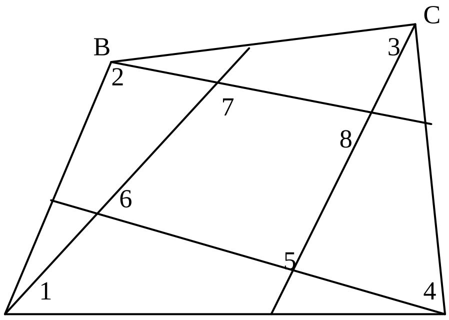
47.37. Izteiksmi var pārveidot formā

$$n^4 - 5n^2 + 4 = \left(n^2 - 1\right) \cdot \left(n^2 - 4\right) = (n-2) \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot (n+2).$$

Viens no 5 pēc kārtas ņemtiem skaitļiem $n-2;\ n-1;\ n;\ n+1;\ n+2$ dalās ar 5 (bet tas nav *n*, jo *n* ir pirmskaitlis); tāpēc reizinājums dalās ar 5. Tā kā *n* nedalās ar 3, tad no diviem skaitļiem $n-2$ un $n-1$ viens dalās ar 3; ja $n-2$ dalās ar 3, tad arī $n+1$ dalās ar 3; ja $n-1$ dalās ar 3, tad arī $n+2$ dalās ar 3. Tātad viss reizinājums dalās ar 9. Ja skaitlis dalās ar 5 un 9, tad tas dalās ar 45.

47.38. Skat. 47.10. zīm. . Ja ap iekrāsotajiem četrstūriem var apvilkt riņķa līnijas , tad

,



47.10. zīm.

izmantojot vienādību, ka ievilkta četrstūra pretējo leņķu summa ir $180°$, iegūstam

$\angle 1 = \angle 5,\ \angle 2 = \angle 6,\ \angle 3 = \angle 7,\ \angle 4 = \angle 8$. Taču

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 < \angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, bet

$\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 + \angle 8 = 360°$; tā ir pretruna.

47.39. Vispirms ievērosim, ka

$$2 \cdot \frac{(c+d)^2}{c^2+d^2} = 2 \cdot \frac{c^2+d^2+2cd}{c^2+d^2} \le 2 \cdot \frac{c^2+d^2+c^2+d^2}{c^2+d^2} = 4..$$

Līdzīgi iegūstam, ka

$$\frac{(a+b)^2}{ab} \ge \frac{a^2+b^2+2ab}{ab} \ge \frac{4ab}{ab} = 4.$$

No šejienes seko prasītā nevienādība.

47.40. a) Pieņemsim, ka $1 \notin M$; tad $-1 \in M$ un arī $(-1)\cdot(-1) = 1 \in M$. Tātad $1 \in M$. Mūsu pieņēmums ir pretrunīgs, tātad $1 \in M$. No šejienes pakāpeniski iegūstam, ka $2 = 1+1 \in M$, $3 = 2+1 \in M$, $4 = 3+1 \in M$; tātad visi naturālie skaitļi pieder kopai *M*.

b) Pieņemsim, ka kādam naturālam skaitlim *n* skaitlis $\frac{1}{n} \notin M$; tad $-\frac{1}{n} \in M$ un $\underbrace{\left(-\frac{1}{n}\right)+\left(-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ reizes}} = -1 \in M$, bet tā ir pretruna.

Tātad visiem naturāliem *n* skaitlis $\frac{1}{n}$ pieder kopai *M*. Līdz ar to katrs racionāls pozitīvs skaitlis $\frac{m}{n}$ arī pieder kopai *M*, jo $\frac{m}{n} = \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)}_{m \text{ reizes}}$.