LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 48. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

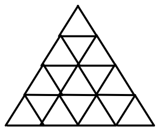
5. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Cirkam ir divi autofurgoni. Pārbraucot uz jaunu vietu, līdzi jāved 10 būri ar dzīvniekiem. Šo būru iecelšanai furgonā nepieciešams atbilstoši 1 min., 2 min., …, 10 min. Abus furgonus sāk aizpildīt vienlaicīgi; katrā furgonā vienlaicīgi var celt vienu būri.

   Kāds ir īsākais laiks, pēc kura visi būri var būt iecelti furgonos? Katrā furgonā iespējams ievietot jebkuru būru daudzumu.

2. Kādu mazāko skaitu mazo trijstūrīšu var nokrāsot melnus tā, lai katram mazajam baltajam trijstūrītim būtu kopēja mala ar vismaz vienu melno (skat. 1. zīm.)?



1.zīm.

3. Naturālu skaitli sauc par **interesantu**, ja tā pirmais cipars izsaka nuļļu skaitu šī skaitļa pierakstā, otrais cipars izsaka vieninieku skaitu šī skaitļa pierakstā utt. Piemēram, skaitlis 3211000 ir interesants.

   Atrodi kaut vienu interesantu četrciparu skaitli.

4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 9, katrs vienu reizi. Katrā rūtiņā ieraksta vienu skaitli.

   Vai var panākt, lai katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstīto skaitļu summa būtu

   a) nepāra skaitlis,

   b) pāra skaitlis?

5. Pa apli ar seju pret centru stāv vairāki zēni un vairākas meitenes. Daži bērni vienmēr runā patiesību, daži vienmēr melo. Uz jautājumu “kas stāv Tev pa labi?” visi bērni atbildēja: “zēns”. Arī uz jautājumu “kas stāv Tev pa kreisi?” visi bērni atbildēja: “zēns”.

   a) pierādīt, ka visi zēni melo,

   b) pierādīt , ka zēnu un meiteņu skaits aplī ir vienāds.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 48. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

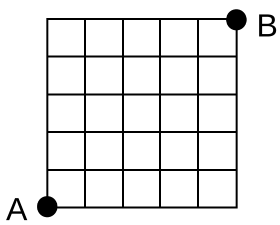
Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Naturāls skaitlis A ir lielāks par naturālu skaitli B. Jānis pierakstīja skaitlim A galā skaitli B. Pēteris pierakstīja skaitlim B galā skaitli A.
   a) vai var būt, ka Jāņa iegūtais skaitlis vienāds ar Pētera iegūto?
   b) vai var būt, ka Jāņa iegūtais skaitlis mazāks par Pētera iegūto?

2. Pierādīt: sešciparu skaitlis dalās ar 13 tādā un tikai tādā gadījumā, ja ar 13 dalās tā pirmo trīs ciparu un pēdējo trīs ciparu veidoto skaitļu starpība (mazinātājs varētu sākties ar vienu vai vairākām nullēm).

3. Atrodi desmit pēc kārtas ņemtus naturālus skaitļus, kuru summas ciparu summa ir 10 (pietiek ar vienu piemēru).

4. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām ar malas garumu 1 (skat. 2.zīm.). No virsotnes A jāaiziet uz virsotni B, ejot tikai pa rūtiņu malām un nevienā punktā nenonākot vairāk nekā vienu reizi.
   a) atrast ceļu, kura garums ir 34,
   b) pierādīt, ka nav ceļa ar garumu 36 vai vairāk,
   c) vai ir ceļš ar garumu 35?



2. zîm.

5. Pa apli ar seju pret centru stāv vairāki zēni un vairākas meitenes. Daži bērni vienmēr runā patiesību, daži vienmēr melo.
   Katram bērnam uzdeva divus jautājumus “Kas stāv Tev pa labi?” un “Kas stāv Tev pa kreisi?” Katrs bērns uz vienu jautājumu atbildēja “zēns”, bet uz otru - “meitene” (nav zināms, uz kuru jautājumu kura atbilde). Pierādīt, ka zēnu un meiteņu skaits aplī ir vienāds .

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 48. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

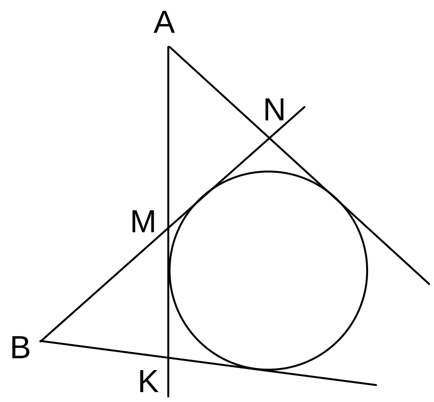
1. Divdesmit rūķīši dalīja saldējumu. Pirmais paņēma $\frac{1}{20}$ visa saldējuma, otrais - $\frac{1}{19}$ atlikuma, trešais - $\frac{1}{18}$ atlikuma, …, priekšpēdējais - pusi atlikuma, pēdējais - visu atlikumu. Kurš no rūķīšiem paņēma visvairāk saldējuma?
2. Zināms, ka a un b ir divciparu naturāli skaitļi, kas viens no otra iegūti, apmainot ciparus vietām. Vai izteiksmes $2-\frac{a}{b}$ vērtība var būt pozitīva, bet mazāka par $\frac{1}{35}$?
3. Plaknē uzzīmēti trīs leņķi, kuru kopīgā daļa ir daudzstūris.
   a) pierādīt, ka šim daudzstūrim var būt 3; 4; 5; 6; 7; 8 malas, ja minēto leņķu lielumi var arī pārsniegt 180^0;
   b) cik malu var būt šim daudzstūrim, ja zināms, ka minētie leņķi visi mazāki par 180^0?
4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās jāieraksts naturāli skaitļi no 1 līdz 9, katrs vienu reizi. Katrā rūtiņā ieraksta vienu skaitli.
   a) vai var panākt, lai visās rindiņās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu pāra skaitļi?
   b) vai var panākt, lai visās rindiņās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu dažādi nepāra skaitļi?
5. Naturālu skaitli sauc par **interesantu**, ja tā pirmais cipars izsaka nuļļu skaitu šī skaitļa pierakstā, otrais cipars izsaka vieninieku skaitu šī skaitļa pierakstā utt. Piemēram, skaitlis 3211000 ir interesants.
   a) pierādi, ka nav trīsciparu interesantu skaitļu,
   b) atrodi kaut vienu desmitciparu interesantu skaitli.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 48. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Ar [x] apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Piemēram, [4,8]=4; [5]=5.
   a) atrast kaut vienu tādu naturālu n, ka
   $$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{5}=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]$$
   b) pierādīt, ka tādu naturālu skaitļu n ir bezgalīgi daudz.
2. Dots, ka ∠A=∠B (skat. 3. zīm.); abu leņķu malas pieskaras riņķa līnijai. Pierādīt, ka trijstūru BMK un AMN perimetri ir vienādi.



3. zîm.

3. Šaha turnīrā piedalās 5 dalībnieki, katrs ar katru spēlē tieši vienu reizi. Vai var gadīties, ka starp **katriem** trim dalībniekiem var atrast kādu, kas uzvarējis vienu no abiem pārējiem, bet ar otru nospēlējis neizšķirti?
4. Taisnstūris sastāv no 3×4 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 12, katrs vienu reizi. Vai var gadīties, ka
   a) visās rindiņās ierakstīto skaitļu summas savā starpā ir vienādas?
   b) visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir savā starpā vienādas?
5. No viena punkta uz apļveida šosejas vienlaicīgi startē 3 automašīnas: A un B - vienā virzienā, C - pretējā. Katra automašīna brauc ar nemainīgu ātrumu. C vispirms sastop A, pēc tam - B.
   a) vai var būt, ka turpmāk C vēl divas reizes sastop A, šai laika posmā nesastopot B?
   b) vai var būt, ka turpmāk C vēl trīs reizes sastop A, šai laika posmā nesastopot B?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 48. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Atrisināt vienādojumu
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b},$$
ja a un b - pozitīvi skaitļi.

2. a) Uz šaha galdiņa novietoti 25 zirdziņi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties 13 tā, ka neviens no izvēlētajiem neapdraud nevienu citu izvēlēto;
b) vai noteikti var izvēlēties 14 zirdziņus ar šādu pašu īpašību?

3. Riņķī ievilktu četrstūri ar diagonāli sadala divos trijstūros. Cik no šiem trijstūriem var būt šaurleņķu trijstūri?

4. Naturālu skaitli sauc par **skaistu**, ja to var izsacīt gan kā triju, gan kā četru, gan kā piecu pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.
a) atrast kaut vienu skaistu naturālu skaitli,
b) atrast vismaz 3 skaistus naturālus skaitļus,
c) pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz skaistu naturālu skaitļu.

5. Smaragda pilsētu apdzīvo rūķīši. Rūķīti sauc par kautrīgu, ja viņš draudzējas ar ne vairāk kā četriem citiem rūķīšiem. Ir zināms, ka katram rūķītim ir vismaz četri kautrīgi draugi.
Pierādiet, ka visi rūķīši Smaragda pilsētā ir kautrīgi.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 48. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Dots, ka $xy^3+1=x+y^3$. Pierādīt, ka $yx^3+1=y+x^3$.

2. Riņķī ievilkts piecstūris ar diagonālēm sadalīts trijos trijstūros. Pierādīt: ne vairāk kā viens no šiem trijstūriem ir šaurleņķu trijstūris.

3. Pierādīt, ka no katriem a) trim, b) pieciem, c) septiņiem pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem var izvēlēties vienu tā, ka izvēlētā skaitļa lielākais kopīgais dalītājs ar katru no pārējiem ir 1.

4. Izliekta četrstūra ABCD malu AB un CD viduspunkti ir attiecīgi M un N. Nogriežņi BN un CM krustojas punktā S. Dots, ka stari AS un DS sadala malu BC trīs vienādās daļās. Pierādīt, ka ABCD ir paralelograms.

5. Sprīdītis, ierodoties Lutaušu zemē, zina, ka katrs lutausis vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību, pie tam ne visi ir meļi. Katru dienu Sprīdītis drīkst sapulcināt dažus (vai pat visus) lutaušus (viņš pats izvēlas, cik un kurus) un katram no klātesošajiem pajautāt, cik starp viņiem ir meļu.

   Izdomājiet, kā Sprīdītis iespējami mazā dienu skaitā var par katru lutausi uzzināt, vai tas melo, vai runā patiesību.

   Nav jāpierāda, ka jūsu piedāvātais dienu skaits ir mazākais iespējamais.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 48. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Dots, ka $0<A<B<C<D$. Pierādīt, ka
$$(A+C)(B+D)<(A+D)(B+C)$$

2. Funkcijas $y=x^2+px+q$ grafiks krusto koordinātu asis trīs dažādos punktos. Vai šo punktu attālumi līdz koordinātu sākumpunktam var būt 3, 4 un 5?

3. Šaurleņķu trijstūrī ABC zināms, ka $\angle BCA=45^0$; AM un BN ir šī trijstūra augstumi, S ir malas AB viduspunkts.
   Pierādīt, ka nogriežņi SM un SN ir vienādi un perpendikulāri savā starpā.

4. Atrast mazāko pozitīvo vērtību, ko var pieņemt izteiksme 56^x-5^y, ja x un y ir naturāli skaitļi.

5. Šaha galdiņš sastāv no 8×8 kvadrātiskām rūtiņām ar malas garumu 1. Karalis apstaigāja visas rūtiņas, katru tieši vienu reizi, un ar pēdējo gājienu atgriezās sākotnējā rūtiņā. (Ar vienu gājienu karalis var pārvietoties par vienu rūtiņu pa horizontāli, pa vertikāli vai pa diagonāli). Kad pēc kārtas savienoja karaļa apstaigāto rūtiņu centrus, attēlojot viņa veikto maršrutu, ieguva slēgtu lauztu līniju, kas pati sevi nekrusto. Kāds ir mazākais un kāds - lielākais iespējamais šīs līnijas garums?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 48. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

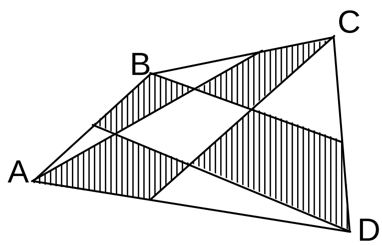
12. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Vai eksistē tādi skaitļi x un y, ka vienlaicīgi pastāv vienādības $\mathrm{tg}x=\sin y$ un $\mathrm{ctg}x=\cos y$?

2. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu
$$x^2+y^2=8z+6.$$

3. Izliektā četrstūrī ABCD virsotnes savienotas ar patvaļīgiem malu iekšējiem punktiem (skat. zīm.)
Pierādīt: nav iespējams, ka ap visiem iesvītrotajiem četrstūriem var apvilkt riņķa līnijas.



4. Atrast mazāko no tādiem naturāliem n, ka nevienādība
$$|x-1|+|x-2|+\ldots+|x-n|\geq 1998$$
izpildās visām x vērtībām.

5. Kādā pilsētā dzīvo 3n iedzīvotāji, n - naturāls skaitlis. Katriem diviem iedzīvotājiem ir vismaz viens kopīgs paziņa. Pierādīt, ka var izvēlēties n iedzīvotājus tā, ka katrs no pārējiem 2n iedzīvotājiem pazīst vismaz vienu izvēlēto.