LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 49. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

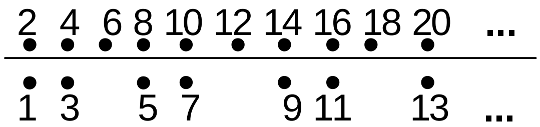
5. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Ielas vienā pusē mājas numurētas ar pāra skaitļiem, otrā - ar nepāra. Pāra numuru pusē brīvas vietas nav atstātas, bet nepāra numuru pusē ik pēc 2 mājām atstāts brīvs laukums automašīnu novietošanai. (skat. 1. zīm.)

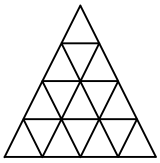
   a) pamato, ka 100. mājai pretī atrodas māja,

   b) kāds ir tās numurs?

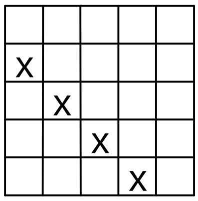


1.zīm.

2. Kādu mazāko skaitu mazo trijstūrīšu var nokrāsot melnus tā, lai katram mazajam baltajam trijstūrītim būtu kopēja mala ar vismaz vienu melno (skat. 2. zīm.)?



2.zîm.



3. zîm.

3. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 5 tā, ka katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē sastopami visi pieci skaitļi. Vai ar krustiņiem apzīmētajās rūtiņās (skat. 3. zīm.) ierakstīto skaitļu summa var būt 20?

4. Vai var atrast 4 tādus naturālus skaitļus, ka nekādiem diviem no tiem ne summa, ne starpība, ne reizinājums nebeidzas ar ciparu 0? Bet vai var atrast 5 tādus skaitļus?

5. Hokeja turnīrā piedalās 5 komandas, katra ar katru spēlē vienu reizi. Par uzvaru komanda saņem 2 punktus, par neizšķirtu – 1 punktu, par zaudējumu – 0 punktus. Turnīru beidzot, visām komandām bija dažāds punktu skaits.

   Izdomā tāda turnīra piemēru, kurā būtu iespējami daudz neizšķirtu spēļu. (**Nav jāpierāda**, ka turnīrs ar lielāku neizšķirtu skaitu nevar būt.)

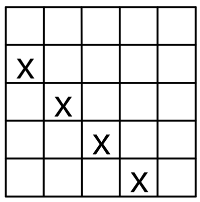
LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 49. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Ar kādu ciparu var beigties triju pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu reizinājums ?

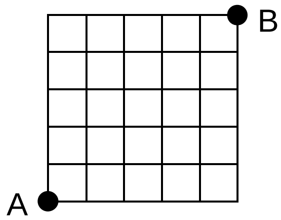
2. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 5 tā, ka katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē sastopami visi pieci skaitļi, pie tam ar krustiņiem atzīmētajās rūtiņās (skat. 1. zīm.) ierakstīto skaitļu summa ir 17.
   Parādi vienu veidu, kā to izdarīt.



1. zîm.

3. Kāds ir mazākais iespējamais piecu parasto daļskaitļu reizinājums, ja to skaitītāji un saucēji visi ir dažādi naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 10?

4. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām ar malas garumu 1 (skat. 2.zīm.). No virsotnes A jāaiziet uz virsotni B, ejot tikai pa rūtiņu malām un nevienā punktā nenonākot vairāk nekā vienu reizi.
   a) atrast ceļu, kura garums ir 34,
   b) pierādīt, ka nav ceļa ar garumu 36 vai vairāk,
   c) vai ir ceļš ar garumu 35?



2. zîm.

5. Naturāli skaitļi no 1 līdz 10 kaut kādā kārtībā izrakstīti pa apli (katrs vienu reizi). Aprēķinātas visas iespējamās triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summas. Pierādi, ka starp šīm summām var atrast divas, kas viena no otras atšķiras vismaz par 3.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 49. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Vai var atrast tādus 5 veselus skaitļus, lai no to pāru summām piecas būtu pozitīvas, bet piecas – negatīvas?

2. Kvadrāts sastāv no $n \times n$ rūtiņām. Tas izkrāsots šaha galdiņa kārtībā melnā un baltā krāsā tā, ka kreisā apakšējā stūra rūtiņa ir melna. Pēc tam katrā otrajā rindiņā baltās rūtiņas pārkrāsoja sarkanas. Pierādīt, ka balto rūtiņu palika tikpat, cik sarkano.

3. Trīsdesmit skolēni piedalās vairākos pulciņos; katrā pulciņā ir tieši 7 dalībnieki. Vai var būt, ka katrs skolēns piedalās tieši 12 pulciņos?

4. Plaknē uzzīmēti trīs leņķi, kuru kopīgā daļa ir daudzstūris.
   a) pierādīt, ka šim daudzstūrim var būt 3; 4; 5; 6; 7; 8 malas, ja minēto leņķu lielumi var arī pārsniegt 180^0;
   b) cik malu var būt šim daudzstūrim, ja zināms, ka minētie leņķi visi mazāki par 180^0?

5. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Andris un Jānis pēc kārtas ieraksta vienā vēl neaizņemtā rūtiņā attiecīgi A un J, kamēr visas rūtiņas aizņemtas. Pirmo gājienu izdara Andris. Katra zēna mērķis ir izveidot iespējami daudz tādu rindiņu, kurā viņa rakstīto burtu ir vairāk nekā pretinieka rakstīto. Tas, kam spēles beigās ir vairāk šādu rindiņu, uzvar. Kurš uzvar, pareizi spēlējot?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola

Latvijas 49. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

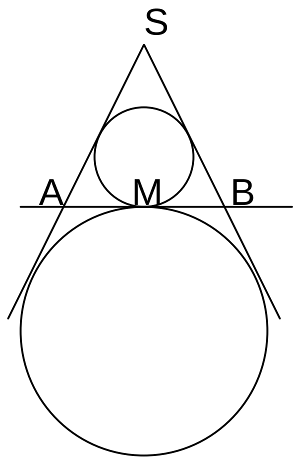
8. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Katrā rūtiņā ieraksta to divu izteiksmju reizinājumu, kas atrodas tabulas ārpusē vienā kolonnā un vienā rindā ar šo rūtiņu (skat. 1. zīm.). Atrast visās sešās rūtiņās ierakstīto reizinājumu summu pēc tam, kad tajā savilkti līdzīgie locekļi.

	$1-3x$	$x+3$	$2x-3$
$x-1$			
$x+2$			

1. zîm.



2. zîm.

2. Divas riņķa līnijas katra pieskaras stariem SA un SB un bez tam taisnei AB vienā un tai pašā punktā M (skat. 2. zīm.). Pierādīt, ka ΔASB ir vienādsānu.

3. Šaha turnīrā piedalās 5 dalībnieki, katrs ar katru spēlē tieši vienu reizi. Vai var gadīties, ka **katrā** triju dalībnieku grupā var atrast kādu, kas vienu no abiem pārējiem šajā grupā uzvarējis, bet ar otru spēlējis neizšķirti?

4. Kādiem četrciparu skaitļiem vienlaicīgi piemīt sekojošas īpašības:
   a) vienu cipars ir par 1 lielāks nekā desmitu cipars,
   b) simtu cipars ir divkāršots desmitu cipars,
   c) tūkstošu cipars ir ne mazāks par divkāršotu vienu ciparu,
   d) pašu skaitli dalot ar 2, iegūst pirmskaitli ?

5. Skolas deju kolektīvā ir 12 pāri. Koncerta nobeigumā visi bērni nostājās vienā rindā: vispirms visas meitenes, tālāk – visi zēni. Katram pārim izskaitām, cik bērnu rindā atrodas starp šī pāra dejotājiem. Aprēķiniet visu iegūto skaitļu summu.

9. klase

9.1. Atrisināt vienādojumu

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b},$$

ja *a* un *b* -- pozitīvi skaitļi.

9.2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Tajās ieraksta veselus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā -- citu skaitli). Pēc tam katrām divām rūtiņām, kurām ir kopīga mala, aprēķina tajās ierakstīto skaitļu summu (pavisam būs 12 summas). Kādu mazāko skaitu dažādu vērtību var iegūt?

9.3. Kādiem kvadrātvienādojumiem $x^2+px+q=0$ vienlaikus piemīt šādas divas īpašības:

a) $p+q=12$,

b) vienādojuma saknes ir veseli skaitļi?

9.4. Izliektā četrstūrī *ABCD* malu *AB* un *CD* viduspunkti ir attiecīgi *M* un *N*. Pastāv vienādības $AC=BD=\sqrt{2}\cdot MN$.

a) uzzīmēt šāda četrstūra piemēru rūtiņu lapā tā, lai četrstūra virsotnes atrastos rūtiņu virsotnēs,

b) aprēķināt leņķi starp *AC* un *BD*.

9.5. Pa apli kaut kādā secībā izrakstīti naturālie skaitļi no 1 līdz 1999 (katrs vienu reizi). Skaitli nokrāso baltu, ja tas lielāks par abiem saviem kaimiņiem, sarkanu, ja tas mazāks par abiem saviem kaimiņiem, un zaļu citos gadījumos. Pierādīt, ka sarkano skaitļu ir tikpat, cik balto.

10. klase

10.1. Dots, ka $xy^3+1=x+y^3$. Pierādīt, ka $yx^3+1=y+x^3$.

10.2. Kuri naturālie skaitļi, kam nav vairāk par 4 cipariem, vienādi ar vienpadsmitkāršotu savu ciparu summu?

10.3. Vai skaitlis *x* noteikti ir racionāls, ja zināms, ka racionāli ir sekojoši skaitļi:

a) x^{55} un x^{89},

b) x^{91} un x^{42} ?

10.4. Izliektā piecstūrī *ABCDE* katra diagonāle paralēla kādai malai. Turklāt $AB=BC=CD$. Pierādīt, ka visas piecstūra malas vienādas savā starpā.

10.5. Kādā grupā ir vairāk par vienu cilvēku.

a) pierādīt, ka šo grupu noteikti var sadalīt divās daļās tā, ka katram cilvēkam vismaz puse viņa draugu ir citā daļā nekā viņš pats,

b) vai šis apgalvojums ir pareizs, ja vārdu "vismaz" aizstāj ar vārdiem " vairāk nekā"?

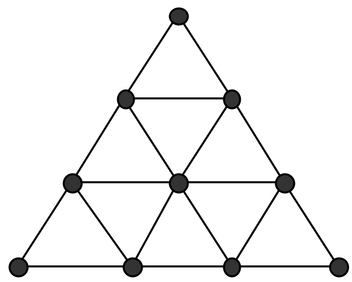
(Uzskatām: ja *A* ir *B* draugs, tad *B* ir *A* draugs. Visas draudzības apskatām tikai šīs grupas ietvaros.)

11. klase

11.1. Ar $[a]$ apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *a*. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu

$$x \cdot [x \cdot [x]] = 41.$$

11.2. Regulārs trijstūris sadalīts 9 mazos regulāros trijstūrīšos. Mazo trijstūrīšu virsotnes atzīmētas (skat. 49.1. zīm.).



49.1. zīm.

Parādīt kaut vienu veidu, kā var nodzēst 4 atzīmētos punktus, lai nekādi trīs atlikušie atzīmētie punkti nebūtu regulāra trijstūra virsotnes.

11. 3. Atrast mazāko pozitīvo vērtību, ko var pieņemt izteiksme $56^x - 5^y$, ja *x* un *y* ir naturāli skaitļi.

11.4. Taisnleņķa trijstūrī *ABC*, kurā ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir 1, novilkts augstums CH pret hipotenūzu *AB*. Pierādīt, ka attālums starp trijstūros *AHC* un *BHC* ievilkto riņķa līniju centriem ir $\sqrt{2}$.

11. 5. Rindā uzrakstīti 15 naturāli skaitļi (daži no tiem var būt arī vienādi). Starp katriem diviem vienādiem skaitļiem uzrakstīts vismaz viens par tiem lielāks skaitlis.

a) pierādīt, ka vismaz viens skaitlis nav mazāks par 4,

b) pierādīt: var gadīties, ka neviens skaitlis nav lielāks par 4.

12. klase

12.1. Vai eksistē tādi skaitļi *x* un *y*, ka vienlaicīgi pastāv vienādības $\operatorname{tg} x = \sin y$ un $\operatorname{ctg} x = \cos y$?

12.2. Vai skaitlis $19 \cdot 98 \cdot 2^{1998} - 1$ dalās ar 3 ?

12.3. Funkcija $f(t)$ definēta visiem reāliem *t*, pieņem reālas vērtības un visiem *x* un *y* apmierina vienādību

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)\cdot f(y) .$$

Turklāt zināms, ka $f(0)\neq 0$.
Pierādīt, ka

a) visiem *x* pastāv vienādība $f(x)=f(-x)$,

b) ja eksistē tāds skaitlis *b*, ka $f(b)=0$, tad visiem *x* pastāv vienādība $f(x+4b)=f(x)$.

12.4. Trijstūra malu garumi ir *a*, *b* un *c*, bet malu pretleņķu lielumi ir atbilstoši α, β un γ. Pierādīt, ka

$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma=3.$$

12.5. Vai var pa apli izrakstīt veselus skaitļus no 0 līdz 9 (katru skaitli vienu reizi) tā, lai jebkuru triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa nepārsniegtu

a) 13,

b) 14,

c) 15 ?