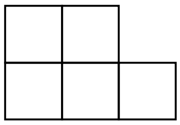
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase
Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Uzrakstīt kaut vienu trīsciparu skaitli, kas ar katru no skaitļiem 654, 253 un 673 vienā šķirā sakrīt, bet divās šķirās atšķiras.

2. Vai var atrast 4 tādus naturālus skaitļus, ka nekādiem diviem no tiem ne summa, ne starpība, ne reizinājums nebeidzas ar ciparu 0 ? Bet vai var atrast 5 tādus skaitļus ?

3. Vai taisnstūri, kura izmēri ir a) 4×5, b) 5×6, c) 6×7, var sagriezt tādās figūrās, kāda parādīta 1. zīm.? Rūtiņas malas garums ir 1.



1.zîm.

4. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 9 (ieskaitot) katru vienu reizi tā, lai nekādu divu blakus uzrakstītu skaitļu summa nedalītos ne ar 3, ne ar 5, ne ar 7 ?

5. Pasaku meža čempionātā piedalās vairākas komandas, katra ar katru spēlē vienu reizi. Pēc votivapu domām, par uzvaru pienāktos 3 punkti, par neizšķirtu - 1 punkts, par zaudējumu - 0 punktu. Pēc šillišallu domām, par uzvaru pienākas 2 punkti, par neizšķirtu - 1 punkts, par zaudējumu - 0 punktu. Vai var gadīties, ka čempionāta noslēgumā tā komanda, kas votivapu vērtējumā ir pirmā, šillišallu vērtējumā ir pēdējā?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

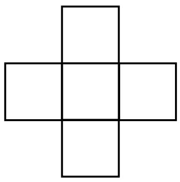
Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Dots, ka a, b, c - naturāli skaitļi. Cik daudzi no skaitļiem a+b, a+c, b+c var vienlaikus dalīties ar 3 ?

2. Kvadrāta malas garums ir 10m. Vai to var sadalīt divās daļās, kuru perimetri ir a) 30m un 60m, b) 50m un 100m ?

3. Naturāli skaitļi no 1 līdz 10 kaut kādā kārtībā izrakstīti pa apli (katrs vienu reizi). Aprēķinātas visas iespējamās triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summas. Pierādīt, ka starp šīm summām var atrast divas, kas viena no otras atšķiras vismaz par 3.

4. Kvadrāts sastāv no 7×7 rūtiņām. Vai var katru rūtiņu nokrāsot vienā no piecām krāsām tā, lai katrā 2. zīm. redzamajā figūrā būtu sastopamas visas piecas krāsas ?



2. zīm.

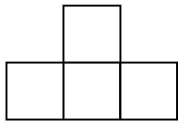
5. Kuba katra skaldne sadalīta 4 kvadrātos. Katrā no iegūtajiem kvadrātiem ierakstīts kāds skaitlis. Jānis aprēķināja visas summas, kuras iegūstamas, ja kādā kvadrātā ierakstītajam skaitlim pieskaita visos tā kaimiņos ierakstītos skaitļus (divus kvadrātus sauc par kaimiņiem, ja tiem ir kopīga mala). Visas Jāņa summas ir 17. Vai visi kvadrātos ierakstītie skaitļi vienlaikus var būt veseli ?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase
Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Neviens no skaitļiem a, b, c, d nav nulle. Ir zināms, ka starp skaitļiem ab, ac, ad, bc, bd, cd ir tieši n negatīvi. Cik negatīvu skaitļu ir starp skaitļiem $\frac{a}{b}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{b}{c}, \frac{d}{b}, \frac{c}{d}$?

2. Melns kvadrāts ar izmēriem 4×4 sagriezts kaut kādos gabalos. Četras tādas baltas figūras, kāda redzama 3. zīm., arī sagrieztas gabalos (rūtiņas malas garums ir 1, gabalu skaits un forma nav zināma). Pierādīt: melnos un baltos gabalus var sagriezt sīkākās daļās tā, lai visas daļas varētu apvienot pāros, pie tam katrā pārī atrastos viena balta un viena melna daļa, kas savā starpā vienādas.



3. zīm.

3. Plaknē uzzīmēti trīs leņķi, kuru kopīgā daļa ir daudzstūris.
   a) pierādīt, ka šim daudzstūrim var būt 3; 4; 5; 6; 7; 8 malas, ja minēto leņķu lielumi var arī pārsniegt 180°,
   b) cik malu var būt šim daudzstūrim, ja zināms, ka minētie leņķi visi mazāki par 180° ?

4. Naturālu skaitli sauc par interesantu, ja tā ciparu summa dalās ar 5.
   a) atrast kaut vienu tādu interesantu x, ka arī x+9 ir interesants,
   b) cik pavisam ir tādu interesantu x, kādi minēti a) punktā?
   c) pierādīt: starp jebkuriem 9 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem ir vismaz viens interesants.

5. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi $\frac{3}{2}; \frac{4}{5}; \frac{5}{3}$. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties divus no uzrakstītajiem skaitļiem (apzīmēsim tos ar a un b), nodzēst tos un to vietā uzrakstīt uz tāfeles skaitļus $\frac{b^2}{a}$ un $\frac{a^2}{b}$. Vai, izdarot vairākus šādus gājienus pēc kārtas, var panākt, lai uz tāfeles vienlaicīgi atrastos skaitļi $\frac{4}{3}; \frac{4}{5}; \frac{5}{2}$?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Tiek vērtēti visi uzdevumi, katrs ar 0÷10 punktiem.

1. Katrā rūtiņā ieraksta to divu izteiksmju reizinājumu, kas atrodas tabulas ārpusē vienā kolonnā un vienā rindā ar šo rūtiņu (skat. 4. zīm.). Atrast visās sešās rūtiņās ierakstīto reizinājumu summu pēc tam, kad tajā savilkti līdzīgie locekļi.

	$1-3x$	$x+3$	$2x-3$
$x-1$			
$x+2$			

4. zīm.

2. Uz riņķa līnijas atzīmēti 5 punkti. Kādu lielāko daudzumu hordu ar abiem galapunktiem šajos punktos var novilkt, lai neveidotos neviens četrstūris ar visām virsotnēm atzīmētajos punktos ?
3. Dots, ka $a^3=a+1$. Pierādīt, ka $a^5=a^4+1$.
4. Zināms, ka ΔABC visas malas vienādas. Uz malām AB un BC attiecīgi ņemti punkti M un N tā, ka $MB+BN=AC$. Pierādīt, ka $\angle MAN+\angle MCN=60°$.
5. Tabula sastāv no $n\times n$ rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta 0, 1 vai 2 tā, lai, aprēķinot rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas, iegūtu visus naturālos skaitļus no 1 līdz 2n, katru vienu reizi. Vai to var izdarīt, ja
a) $n=5$, b) $n=6$?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar $0 \div 10$ punktiem.

1. Triju veselu skaitļu summa ir 0. Vai to kubu summa var būt lielāka par 2000200002000 ?

2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Tajās ieraksta veselus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā - citu skaitli). Pēc tam katrām divām rūtiņām, kurām ir kopīga mala, aprēķina tajās ierakstīto skaitļu summu (pavisam būs 12 summas). Kādu mazāko skaitu dažādu vērtību var iegūt ?

3. Dots, ka AB ir riņķa līnijas diametrs, bet MN - tās horda, kas nav diametrs (visi punkti A, B, M, N ir atšķirīgi). No punktiem A un B pret taisni MN novilkti perpendikuli; to pamati ir attiecīgi A_1 un B_1. Pierādīt, ka $MA_1=NB_1$.

4. Uz 5 kartītēm uzrakstīts pa naturālam skaitlim (starp tiem var būt arī vienādi). Uz katrām trim kartītēm uzrakstīto skaitļu summa dalās ar to skaitļu summu, kas uzrakstīti uz abām pārējām kartītēm.
   a) atrodiet kaut vienu piemēru, kur šis nosacījums izpildās,
   b) vai tas var izpildīties, ja uz visām kartītēm uzrakstīti dažādi skaitļi ?

5. Kvadrāts sastāv no $n\times n$ rūtiņām. Rindas sanumurētas no lejas uz augšu ar skaitļiem 1; 2; ...; n; tāpat sanumurētas kolonnas no kreisās uz labo pusi. Katrā rūtiņā ierakstīts vai nu +1, vai -1. Ja rindas un kolonnas numuri ir vienādi, tad visu šai rindā ierakstīto skaitļu reizinājums atšķiras no visu šai kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājuma.
   Vai tas ir iespējams, ja a) n=7, b) n=8 ?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0÷10 punktiem.

1. Dots, ka A un B ir trīsciparu naturāli skaitļi, pie tam A simtu cipars sakrīt ar A vienu ciparu. Zināms arī, ka A - B = 297 un B ciparu summa ir 23. Atrast A un B.

2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta pa naturālam skaitlim, kas nepārsniedz n (visiem skaitļiem jābūt dažādiem) tā, lai no katriem diviem skaitļiem, kas ierakstīti rūtiņās ar kopīgu malu, viens dalītos ar otru.
   Vai to var izdarīt, ja a) n=15, b) n=13 ?

3. Izliektā piecstūrī ABCDE katra diagonāle paralēla kādai malai. Bez tam AB=BC=CD. Pierādīt, ka visas piecstūra malas ir vienādas savā starpā.

4. **Ieliektā** četrstūrī ABCD leņķu A, B un D lielumi ir 45°. Pierādīt, ka ABCD malu viduspunkti ir taisnstūra virsotnes.

5. No pirmajiem 20 naturālajiem skaitļiem izvēlēti 10 skaitļi tā, ka to summa ir 105, bet nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nav 21. Aprēķināt visu izvēlēto skaitļu kvadrātu summu.

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

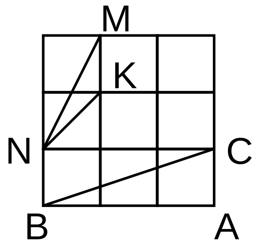
11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0÷10 punktiem.

1. Ar [a] apzīmējam lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz a. Piemēram, [4,8]=4; [5]=5.
   Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu

$$x [x [x]] = 41$$

2. Kvadrāts sastāv no 3×3 vienādām kvadrātiskām rūtiņām (skat. 1. zīm.). Kas lielāks: ∠MNK vai ∠ABC ?



1. zīm.

3. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā; AB ir tās diametrs. Diagonāles AC un BD krustojas punktā S. Uz AB ņemts tāds punkts M, ka SM⊥AB. Pierādīt, ka ∠DMS = ∠CMS.

4. Naturāls skaitlis n, kas nedalās ar 4, vienāds ar savu četru mazāko naturālo dalītāju kvadrātu summu.
   a) pierādīt, ka n noteikti ir pāra skaitlis,
   b) atrast vienu tādu skaitli n,
   c) pierādīt, ka citu tādu n nav.

5. Kvadrāts sastāv no n×n vienādām kvadrātiskām rūtiņām, kur n≥2. Kādu lielāko daudzumu rūtiņu centru var atzīmēt, lai nebūtu tāda paralelograma, kam visas virsotnes atzīmētas ?

LU A. Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 50. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0÷10 punktiem.

1. Skaitļu virknē pirmais un otrais loceklis abi ir 1, bet katrs nākošais vienāds ar abu iepriekšējo summu. Vai ar 5 dalās šīs virknes
   a) 21-ais, b) 2000-ais loceklis ?

2. Trijstūra malu garumi ir a, b un c, bet malu pretleņķu lielumi ir atbilstoši α, β un γ. Pierādīt, ka
$$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)\cos\beta+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\cos\gamma=3.$$

3. Kubs ar šķautnes garumu 3 sastāv no 27 kubiņiem ar šķautnes garumu 1. Caur lielā kuba centru perpendikulāri vienai no tā diagonālēm novilkta plakne. Cik mazos kubiņus tā šķeļ?

4. Atrisināt vienādojumu
   a) $4x\,(2x^2 - 1) = 1$,
   b) $8x\,(2x^2 - 1)\,(8x^4 - 8x^2+1) = 1$.

5. Pa apli novietotas 2000 konfektes. Divi spēlētāji pārmaiņus apēd pa trim patvaļīgām konfektēm, kamēr aplī paliek 2 konfektes.
   Ja tās spēles sākumā atradās blakus, uzvar otrais spēlētājs; ja tās spēles sākumā neatradās blakus, uzvar pirmais spēlētājs.
   Kas uzvar, pareizi spēlējot?