Īsi atrisinājumi

5.1. a) jā, var; piemēram,

11, 1, 12, 2, 13, 3, 14, 4, 15, 5, 16, 6, 17, 7, 18, 8, 19, 9, 20, 10

b) nē, nevar. Skaitlim 10 iespējams tikai viens kaimiņš – skaitlis 20.

5.2. No 22. līdz 60. vagoniņam, tos abus ieskaitot, ir 60-22+1=39 vagoniņi. Atbilstošajā posmā apakšā arī ir 39 vagoniņi. Tātad no 86. līdz n-jam vagoniņam, tos abus ieskaitot, ir 39-12=27 vagoniņi. Tāpēc n=86+27-1=112.

5.3. Atbilde: 14.

Risinājums. Visas konfektes nevar savākt vienā kastē, jo to ir nepāra skaits, bet pēc katra gājiena kastītē, kurā ieliek konfektes, to ir pāra skaits. Kā savākt kopā 14 konfektes, redzams shēmā 1. zīm.

1	2	3	4	5
1	2	3	8	1
2	2	3	7	1
2	2	2	7	2
0	2	2	7	4
0	0	4	7	4
0	0	0	7	8
0	0	0	14	1

1. zīm.

5	3	2
2	1	4
4	5	3

2. zīm.

5.4. Atbilde: 5 krāsas.

Risinājums. Ja būtu 6 krāsas a, b, c, d, e, f, tad būtu jābūt 15 blakus esošu krāsu pāru ab, ac, ad, ae, af, bc, bd, be, bf, cd, ce, cf, de, df, ef. Bet ir tikai 12 malas, pa kurām robežojas 2 rūtiņas. Piemēru ar 5 krāsām skat. 2.zīm.

5.5. a) jā. Piemēram, var 20 reizes veikt ciklisku maršrutu ABCDEA un 1 reizi – maršrutu ABCFDEA.

b) nē. Visu palikušo „ārējo" ceļu garumi ir pāra skaitļi, „radiālo" ceļu garumi – nepāra. Lai sāktu un beigtu kustību ārējā virsotnē A, pāra skaitu reižu jābrauc pa radiāliem ceļiem. Tāpēc maršruta kopgarums izsacīsies ar pāra skaitu kilometru.

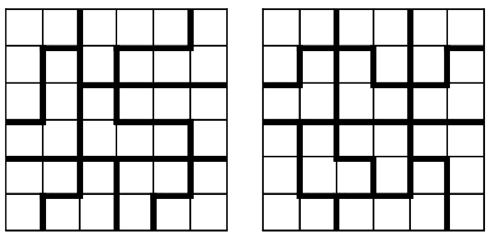
6.1. Atbilde: 17;

a) tabula ar skaitļu summu 17 redzama 3. zīm.

b) mazākā iespējamā summa vienā rindā vai kolonā ir 3. Tāpēc visu šo sešu summu summa S nav mazāka par 3 + 4 + 5+ 6+ 7+ 8 = 33. Tā kā S ir pāra skaitlis (katrs tabulas skaitlis tajā ieskaitīts divas reizes), tad $S \geq 34$, no kurienes seko, ka tabulā ierakstīto skaitļu summa nav mazāka par 17.

1	1	1
1	2	2
2	3	4

3. zīm.



4. zīm.

6.2. a) jā; piemēram, patiesie rūķīši un meļi stāv pamīšus.

b) nē. Sanumurēsim rūķīšus pēc kārtas ar numuriem 1; 2; 3; ...; 2005. Ja 1. rūķītis ir patiess, tad otrais ir melis, trešais – patiess, ceturtais – melis, ..., 2005-ais – patiess, pirmais – melis. Iegūta pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja 1. rūķītis ir melis.

6.3. Atbilde: 4 vai 8 trīs rūtiņu gabali un atbilstoši 6 vai 3 četru rūtiņu gabali.

Risinājums. Apzīmēsim 3 rūtiņu gabalu skaitu ar a, bet 4 rūtiņu gabalu skaitu ar b. Tad 3a+4b=36, a un b – naturāli skaitļi. Skaidrs, ka 1≤a<12. Pārbaudot visas iespējamās naturālās a vērtības, redzam: b iznāk naturāls tikai pie a=4 (tad b=6) un a=8 (tad b=3). Atbilstoši sadalījumi redzami 4. zīm.

6.4. Atbilde: n=87;

Risinājums. Ir 14 skaitļi, kas dalās ar 7: 1·7, 2·7, ..., 13·7=91, 14·7=98. Ja uz tāfeles ir 87 skaitļi, tad tur nav 13 skaitļu; tad tur ir **vismaz viens skaitlis, kas dalās ar 7**. Tā kā ir 33 skaitļi, kas dalās ar 3, un 33>13, tad uz tāfeles ir **vismaz viens skaitlis, kas dalās ar 3**. Ņemam abus norādītos skaitļus (ja tie sakrīt, otro skaitli izvēlamies patvaļīgi).

Ja uz tāfeles ir 86 skaitļi, tad var gadīties, ka tur nav neviena skaitļa, kas dalās ar 7, un tad divus meklējamos skaitļus atrast nevar.

6.5. To, ka kompānija X piemānījusi kompāniju Y, attēlosim ar X→Y.

Apskatām vienu kompāniju A; eksistē tāda C, ka A→C, un tātad B, ka A→B→C. Eksistē arī tāda D, ka A→D→B→C, pie tam D≠C (pretējā gadījumā būtu B→C un C→B). Tātad A ir piemānījusi B, C un D.

Piemērs ar 7 kompānijām: 1→2→3→4→5→6→1, 1→5→3→1, 2→4→6→2, 1→7→4→1, 3→7→6→3, 5→7→2→5.

7.1. Atbilde: 6 skaitļus.

a) var izsvītrot visus pāra skaitļus

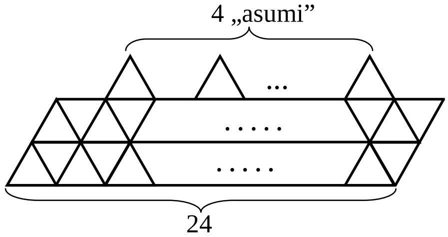
b) katrā no skaitļu pāriem (1,2), (3, 4), (5, 6), (7, 10), (8, 9), (11, 12) vismaz viens skaitlis ir jāsvītro.

7.2. Katri divi grafiki krustojas. Ja 1. un 3. grafiks krustojas punktā (a; b), tad $b=2003a+4197$ un $b=2005a+4199$. Saskaitot šīs vienādības un izdalot rezultātu ar 2, iegūstam $b=2004a+4198$, t.i., (a, b) atrodas arī uz trešā grafika.

7.3. Atbilde: **a)** jā; **b)** nē.

Risinājums. **b)** Visu plāksnīšu apkārtmēru summa ir 300. Tāpēc saliktās figūras apkārtmērs ir 300-2n, kur n – to malu skaits, pa kurām saskaras divas plāksnītes. tātad apkārtmērs ir pāra skaitlis.

Piemēru **a)** gadījumam skat. 5. zīm.



5. zīm.

7.4. a) 12=1+2+3+6

b) 12n=n+2n+3n+6n

c) ja a – nepāra skaitlis, tad visi tā dalītāji arī ir nepāra skaitļi. Bet četru nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis, tātad nav a.

7.5. Uzliekam monētas uz kausiem pa 4. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, otrajā svēršanā uzliekam uz kausiem pa 2 monētām no tām 4, kas pirmajā svēršanā atradās uz viena kausa. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, uzliekam uz kausiem pa 1 monētai no tām, kas otrajā svēršanā atradās uz viena kausa. Ja līdzsvara nav, ir divu dažādu masu monētas. Ja līdzsvars ir, visām monētām ir vienādas masas.

8.1. Ievērosim, ka:

- ja 2^n sākas ar 1, tad 2^{n+1} nesākas ar 1,
- 2^n ciparu skaits nevar par vairāk nekā 1 pārsniegt 2^{n-1} ciparu skaitu,
- ja 2^n sākas ar 1, tad 2^n ir par 1 ciparu vairāk nekā 2^{n-1}.

No šejienes izriet: sadalot skaitļus 2^n, n = 1; 2; ...; 100, grupās pēc to ciparu skaita, pavisam ir 31 grupa un katrā grupā (izņemot viencipara pakāpes) ir tieši viena pakāpe, kas sākas ar ciparu 1. Tāpēc uzdevuma atbilde ir 30.

8.2. Atbilde: 8 rūtiņas.

Risinājums. Katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā ne vairāk kā 2 rūtiņas var būt izcilas: ja tādu būtu 3, tad rūtiņa, kurā ierakstīts mazākais skaitlis no šiem trim, nevarētu būt izcila – pretruna. Tātad izcilu rūtiņu nav vairāk par 4·2=8. Piemēru ar 8 izcilām rūtiņām skat. 6. zīm.

12	1	13	8
11	2	14	7
10	3	15	6
9	4	16	5

6. zīm.

8.3. Atbilde: ar diviem jautājumiem.

Atrisinājums. Ar vienu jautājumu nepietiek: ja Andris pateiks Jurim skaitli $x_1x_2x_3x_4x_5$, Juris nezinās, vai Andris, iedomājies $x_1x_2x_3x_4$, $x_1x_2x_3x_5$, $x_1x_3x_4x_5$ vai $x_2x_3x_4x_5$.

Izmantojot divus jautājumus, Juris var rīkoties sekojoši. Pēc Andra pirmās atbildes A viņš izvēlas 5 dažādus pirmskaitļus p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, ar kuriem nedalās A (un tātad arī n), un pasaka tos Andrim. Atkarībā no tā, ar kuru no šiem pirmskaitļiem dalās Andra otrā atbilde, Juris noskaidros n.

8.4. Punkts C var atrasties vai nu uz AB vidusperpendikula, vai uz r.l. (A; AB), vai uz r.l. (B; AB). Atkarībā no šo 3 līniju un *t* savstarpējā novietojuma tādu punktu C uz taisnes *t* var būt 0; 1; 2; 3; 4; 5. **Visiem gadījumiem nepieciešami piemēri.**

8.5. Atbilde: $x \in \{0; \pm1; \pm2; \pm3\}$.

Risinājums. Vienādojumu pakāpeniski pārveido par

$$x\left[x^2(x^2-7)^2-36\right]=0$$
$$x\left[(x^2)^3-14(x^2)^2+49x^2-36\right]=0$$
$$x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)=0$$

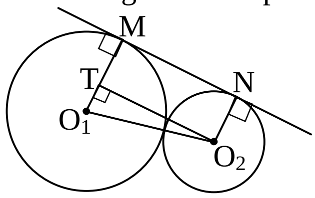
utt.

9.1. Nevienādību pārveido par $(a-5)^2-(a-5)(b-5)+(b-5)^2\geq 0$ un ievēro, ka $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$.

9.2. Šādi pirmskaitļi var būt, piemēram, 23; 41; 59; 67. To summa ir 190. Tā nevar būt citāda, jo cipari 2; 4; 5; 6 nevar būt saskaitāmo pirmskaitļu vienu cipari; tāpēc tie ir desmitu cipari, un meklējamā summa noteikti ir 10(2+4+5+6)+(1+3+7+9)= =10·17+20=190

9.3. a) Tā kā KM=KA (pieskares no viena punkta) un KN=KA (tāpat), tad KM=KN.

b) Abas kopējās ārējās pieskares ir vienāda garuma. Tāpēc no a) seko, ka KL=MN.



No taisnleņķa trijstūra O_1TO_2 seko, ka $MN = TO_2 = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$. Tādu pašu rezultātu iegūst, ja R-r=0 un ΔO_1TO_2 reducējas par nogriezni.

9.4. Atbilde: nē, neeksistē.

Risinājums. No sešiem skaitļiem a, b, c, d, e, f, saskaitot tos pa 2, iegūst 15 summas: a+b, a+c, a+d, a+e, a+f, b+c, b+d, b+e, b+f, c+d, c+e, c+f, d+e, d+f, e+f. Pieņemsim, ka iegūtie skaitļi ir visi naturālie skaitļi no 1 līdz 15 ieskaitot. Tad visiem skaitļiem a, b, c, d, e, f jābūt dažādiem. Varam pieņemt, ka a<b<c<d<e<f. Skaidrs, ka vismazākā summa ir a+b, otrā mazākā summa ir a+c, vislielākā summa ir e+f, otrā lielākā summa ir d+f. Tāpēc a+b=1, a+c=2, d+f=14, e+f=15. Tātad

(a+c)-(a+b)=1=(e+f)-(d+f), no kurienes seko c-b=e-d un c+d=b+e. Bet tad ne visas 15 pāru summu skaitliskās vērtības ir dažādas, tātad šīs summas nevar pieņemt visas naturālās vērtības no 1 līdz 15 ieskaitot.

9.5. a) Apzīmējot pāra ciparu ar p, bet nepāra ciparu ar n, tieši pārliecināmies, ka virknes sākums ir $\underline{npnpp}\,\underline{npnpp}\ldots$.

Katru virknes locekli viennozīmīgi nosaka četri iepriekšējie. Redzam, ka virknē ir 2 vienādi četru sekojošu burtu fragmenti $npnp$. Pēc otrās šī fragmenta parādīšanās virkne „attīstīsies" tāpat kā pēc pirmās; tātad tā ir periodiska ar periodu ($npnpp$). Tātad virknē nekur pēc kārtas neparādīsies trīs burti p; tāpēc uzdevumā minētajā virknē nekad neparādīsies pēc kārtas sekojoši cipari 2; 0; 0; 5.

b) **Ja zināmi četru saskaitāmo summas pēdējais cipars un trīs saskaitāmo pēdējie cipari, tad ceturtā saskaitāmā pēdējais cipars ir noteikts viennozīmīgi.**

Aplūkosim visus četru pēc kārtas ņemtu ciparu komplektus tādā secībā, kā tie parādīsies mūsu virknē; daži pirmie komplekti ir 1234, 2340, 3409 utt. Tā kā četru ciparu dažādu komplektu pavisam ir tikai galīgs skaits, tad agri vai vēlu kādam komplektam jāatkārtojas. Aplūkosim **pirmo** šādu atkārtošanos. Mēs apgalvojam, ka tā var būt tikai komplekta 1234 – paša pirmā komplekta – atkārtošanās. Tiešām, ja kā pirmais atkārtotos cits komplekts ω:

$$\ldots\alpha;\ \omega;\ \ldots\ \ldots\ \beta;\ \omega;\ \ldots,$$

tad saskaņā ar augstāk izcelto faktu jābūt $\alpha=\beta$, un ω nebūtu pirmais komplekts, kas atkārtojas – pretruna.

Tātad 1; 2; 3; 4 noteikti šajā secībā vēl kādreiz parādīsies mūsu virknē.

10.1. Sākotnēji uzrakstīto skaitļu summa ir 55. Izdarot gājienus, atlikums, ko iegūst, uz tāfeles esošo skaitļu summu dalot ar 3, nemainās. Tātad arī beigu situācijā šis atlikums ir 1, jo 55=18·3+1.

Ievērosim, ka pēc 1., 2., 3., ... gājiena izdarīšanas uz tāfeles vienmēr ir vismaz viens jaunuzrakstīts skaitlis (t.i., 0; 1; vai 2). Tātad otrais uz tāfeles palikušais skaitlis ir 0; 1 vai 2. Vienīgais no tiem, kas apmierina nosacījumu par summas atlikumu, ir skaitlis 2.

Skaitli 2 var iegūt, piemēram, aizstājot 1+2+3 ar 0 un 0+4+5+6+7+9+10=41 ar 2.

10.2. Tā kā katras malas garums ir mazāks par visu citu malu garumu summu, tad a≠b+c+d+e. Kvadrātvienādojuma grafika simetrijas dēļ $f(x_1)=f(x_2)$ (kur $x_1 \neq x_2$) tad un tikai tad, ja $\frac{x_1+x_2}{2}=x_0$, kur x_0 – parabolas virsotnes abscisa. No dotā seko, ka $a+b+c+d+e=2x_o$. No tā savukārt seko visas vajadzīgās vienādības.

10.3. Tā kā katrs no n dalībniekiem izcīnīja vismaz vienu un ne vairāk kā n-1 uzvaru, tad viena dalībnieka uzvaru skaits var pieņemt tikai n-1 dažādas vērtības. Tā kā dalībnieku ir n un n>n-1, tad ir divi dalībnieki, kas izcīnījuši vienu un to pašu uzvaru skaitu. Viens no tiem savstarpējā cīņā uzvarējis; apzīmēsim to ar A, bet otru minēto dalībnieku ar B. Lai A un B uzvaru daudzumi būtu vienādi, A jābūt zaudējušam pret kādu no dalībniekiem, pret kuru B ir uzvarējis, šo dalībnieku varam apzīmēt ar C.

10.4. Apzīmēsim ABCD diagonāļu krustpunktu ar O. Tad no $\Delta AOB \sim \Delta NOB$ un $\Delta COD \sim \Delta AOM$ seko

$$\frac{OB}{OD}=\frac{OA}{ON} \text{ un } \frac{OD}{OC}=\frac{OM}{OA}$$

Sareizinot šīs vienādības, iegūstam $\frac{OB}{OC}=\frac{OM}{ON}$, no kā seko vajadzīgais.

10.5. Apzīmēsim uzrakstītos skaitļus ar $1=n_1<n_2<\ldots<n_k=100$. Pie i=1; 2; ...; k-1 jābūt $n_{i+1} \leq 2n_i$, citādi n_{i+1} nav izsakāms prasītajā veidā. Tāpēc $n_2 \leq 2$, $n_3 \leq 4$, $n_4 \leq 8$, $n_5 \leq 16$, $n_6 \leq 32$, $n_7 \leq 64$. Tā kā uz lapas atrodas arī 100, tad $k \geq 8$. Pierādīsim, ka patiesībā $k \neq 8$. Ja k=8, tad $n_8=100$. Tā kā $n_7+n_6 \leq 96$, tad jābūt $100=2n_7$, tāpēc $n_7=50$. Tā kā $n_5+n_6 \leq 48$, jābūt $n_7=2n_6$, tāpēc $n_6=25$. Tā kā $n_5+n_4 \leq 24$, tad jābūt $n_6=2n_5$, bet tas nav iespējams, jo n_6 ir nepāra skaitlis.
To, ka n=9 der, parāda piemērs 1; 2; 3; 5; 10; 20; 25; 50; 100 (ir arī citi piemēri).

11.1. Apzīmēsim a=2001. Tad zemsaknes izteiksme ir

$$(a+4)(a+2)(a-2)(a-4)+36=(a^2-16)(a^2-4)+36=a^4-20a^2+100=\left(a^2-10\right)^2,$$

tāpēc uzdevuma atbilde ir $|a^2-10|=2001^2-10=4003991$.

11.2. Atbilde**:** intervālu $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Atrisinājums:

a) ja $|p|\leq 1$ un $|q|\leq 1$, tad vienādojuma $x^2+px+q=0$ reālai saknei x_o ir spēkā $|x_o|=\left|\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}\right|\leq\left|\frac{p}{2}\right|+\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q}\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Tātad visas saknes pieder minētajam intervālam.

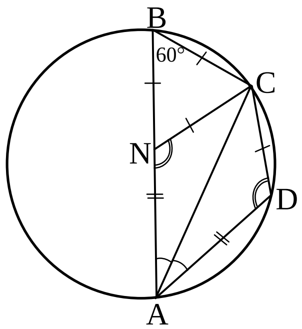
b) vienādojumu $x^2\pm x-1=0$ saknes ir $\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$ un $\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$. Tātad intervāla galapunkti **ir** vajadzīgā tipa vienādojumu saknes. Pieņemsim, ka $z\in\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$, tad $z=\alpha\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, kur $|\alpha|\leq 1$. Apskatām vienādojumu $x^2-\alpha x-\alpha^2=0$. Ievērojam, ka $|-\alpha|\leq 1$ un $\left|-\alpha^2\right|\leq 1$, un šī vienādojuma saknes ir $\frac{\alpha}{2}\mp\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\alpha^2}=\frac{\alpha}{2}\mp|\alpha|\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}$. Tātad viena no tām ir $\alpha \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = z$. Tātad **visi** apskatāmā intervāla punkti ir vajadzīgā tipa vienādojumu saknes.

11.3. a) Skaitļa 120 apskatāmie dalītāji ir 1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12; 15; 20; 24; 30; 40; 60; 120; to summa ir 360. Viegli redzēt, ka 120=60+40+20=1+2+3+4+5+6+8+10+12+ +15+24+30. Tātad 120 ir viens līdzsvarota skaitļa piemērs.

b) Pieņemsim, ka n – līdzsvarots skaitlis, bet p – pirmskaitlis, ar kuru n nedalās. Tad, ja skaitļa n dalītāji ir d_1; d_2; ...; d_k, tad skaitļa $n \cdot p$ dalītāji ir d_1; d_2; ...; d_k, pd_1; pd_2; ...; pd_k. Tāpēc skaidrs, ka arī $n \cdot p$ ir līdzsvarots.

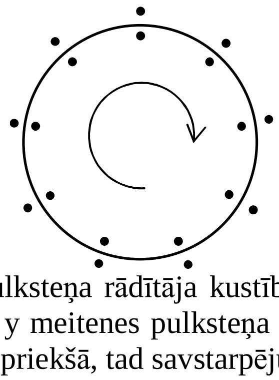
Tā kā pirmskaitļu ir bezgalīgi daudz, tad, sākot ar 120, var konstruēt aizvien jaunus līdzsvarotus skaitļus (piemēram, nākošais varētu būt 120·7=840).

11.4. Atliekam uz BA tādu punktu N, ka BN=BC. Tad ΔBCN – regulārs, tāpēc ∠CNA=120° un CN=CD. Tā kā ∠B+∠D=180°, tad ∠D=120°; tātad ∠CNA=∠CDA. Tā kā vienādās hordas CB un CD savelk vienādus lokus, tad ∠NAC=∠DAC. Secinām, ka ∠NCA=∠DCA (katrā trijstūrī iekšējo leņķu summa ir 180°). Tāpēc ΔCNA=ΔCDA (*mlm*); tātad NA=DA. No tā seko vajadzīgais.



11.5. a) Pieņemsim, ka tāda pāra nav. Lūgsim katram zēnam uzrakstīt y dažādas kartītes – katru ar savu vārdu un kādu tās meitenes vārdu, kas viņam patīk. Līdzīgu darbu lūgsim izdarīt meitenēm. Tā kā savstarpēju simpātiju nav, tad nav divu kartīšu, uz kurām būtu vienādi uzraksti; tāpēc kartīšu nav vairāk par $n \cdot n = n^2$. No otras puses, kartīšu ir $x \cdot n + y \cdot n = (x+y) \cdot n > n \cdot n = n^2$ – pretruna.

b) Attēlosim meitenes ar punktiem riņķa līnijas iekšpusē, bet zēnus – ar punktiem riņķa līnijas ārpusē (skat. zīm., kur n=9).



Ja katrai meitenei patīk x zēni pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kurš stāv viņai blakus, bet katram zēnam – y meitenes pulksteņa rādītāja kustības virzienā, sākot ar to, kura stāv viņam vienu pozīciju priekšā, tad savstarpēju simpātiju nav.

12.1. Apzīmēsim vienādojuma kreiso pusi ar a; tad labās puses mazināmais ir $a{\cdot}x$, bet mazinātājs ir $\frac{a}{x}$. Iegūstam vienādojumu $a = ax - \frac{a}{x}$ jeb

$$a\left(1 - x + \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Tā kā pie $x>0$ arī $a>0$, iegūstam $1 - x + \frac{1}{x} = 0$, no kurienes $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (otra sakne neder, jo $x>0$).

12.2. a) Pieņemsim no pretējā, ka visiem naturāliem k pastāv nevienādība $a_k>0$. Tā kā virkne ir dilstoša, tad $a_k \le 60$; tāpēc $a_{n+1} \le a_n - \frac{1}{60}$ visiem n. Tāpēc $a_{n+1} \le a_1 - \frac{n}{60} = 60 - \frac{n}{60} < 0$ pie $n > 3600$ – pretruna.

b) Pieņemsim no pretējā, ka $a_k>0$ visiem $k \le 2005$. Spriežot līdzīgi kā a) punktā, pakāpeniski iegūstam

$$a_{301} < 60 - \frac{300}{60} = 55 \qquad a_{1576} < 30 - \frac{150}{30} = 25$$

$$a_{576} < 55 - \frac{275}{55} = 50 \qquad a_{1701} < 25 - \frac{125}{25} = 20$$

$$a_{826} < 50 - \frac{250}{50} = 45 \qquad a_{1801} < 20 - \frac{100}{20} = 15$$

$$a_{1051} < 45 - \frac{225}{45} = 40 \qquad a_{1876} < 15 - \frac{75}{15} = 10$$

$$a_{1251} < 40 - \frac{200}{40} = 35 \qquad a_{1976} < 10 - \frac{100}{10} = 0 \text{ - pretruna.}$$

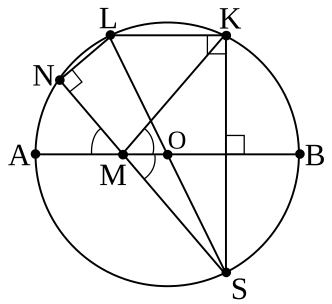
$$a_{1426} < 35 - \frac{175}{35} = 30$$

12.3. Izmantosim matemātisko indukciju. Ja n=1, vieninieks jau atrodas vajadzīgajā vietā. Pieņemsim, ka apgalvojums ir pareizs pie n=1; 2; ...; m, un apskatīsim situāciju, kad rindā izrakstīti skaitļi no 1 līdz m+1 ieskaitot. Pieņemsim, ka vieninieks nekad neatradīsies pirmajā vietā. Šķirosim divus gadījumus:

a) pirmajā vietā kādreiz atradīsies skaitlis m+1.Tad ar nākošo gājienu tas nonāks pēdējā vietā un tātad turpmāk vairs neizkustēsies. Tāpēc, sākot ar šo brīdi, visas darbības notiks ar skaitļiem no 1 līdz m ieskaitot, un vieninieks nonāks virknes sākumā saskaņā ar induktīvo hipotēzi.

b) Skaitlis (m+1) **nekad** neatradīsies pirmajā vietā. Ja (m+1) jau sākumā atrodas pēdējā vietā, spriežam kā a) gadījumā. Ja nē, (m+1) vienmēr atrodas **starp** pirmo un pēdējo vietu. Tad skaitlis k, kas sākumā atrodas pēdējā vietā, nekad no tās neizkustas. Tāpēc, ja mēs **apmainām vietām** (m+1) un k, tas neatstās nekādu iespaidu uz vieninieka kustību. Tālāk atsaucamies uz induktīvo hipotēzi.

12.4. Pagarinām NM līdz krustpunktam S ar riņķa līniju. Tā kā $\angle BMS=\angle BMK$, tad K un S ir simetriski attiecībā pret AB. Tā kā $\angle LNS=90°$, tad LS ir diametrs. Tāpēc $\angle LKS=90°$. Tātad $LK\perp KS$ un $AB\perp KS$; tātad $LK\|AB$, k.b.j.



12.5. Apzīmēsim trijstūra malu garumus ar a, b, c; apzīmēsim $a+b+c=x$. No Herona formulas iegūstam

$$L^2=\frac{x}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-a\right)\left(\frac{x}{2}-b\right)\left(\frac{x}{2}-c\right) \text{ jeb } 16L^2=x(x-2a)(x-2b)(x-2c).$$

Tā kā $16L^2$ ir pāra skaitlis, tad arī x ir pāra skaitlis. Šķirojam divas iespējas:

1) visi a, b, c ir pāra skaitļi; tad $a=b=c=2$ un $L=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}\notin \mathrm{N}$.

2) viens no skaitļiem a, b, c ir pāra skaitlis, bet divi – nepāra. Varam pieņemt, ka a – pāra skaitlis; tad $a=2$. Ja $b\neq c$, varam pieņemt, ka $b<c$. Tā kā b un c – nepāra pirmskaitļi, tad $c-b\geq 2$, jeb $c-b\geq a$, kas ir pretruna ar trijstūra nevienādību. Tāpēc $b=c$, un iegūstam

$$16L^2=x(x-4)(x-2b)^2$$

$$16L^2=(2b+2)(2b-2)\cdot 4$$

$$(2b+2)(2b-2)=4L^2$$

$$b^2-1=L^2$$

$$(b-L)(b+L)=1$$

$$\text{tāpēc } b-L=\frac{1}{b+L}$$

Acīmredzot tas nav iespējams, jo $b-L\in \mathrm{Z}$, bet $b+L>3$, tāpēc $\frac{1}{b+L}\notin \mathrm{Z}$.

Īsi norādījumi vērtēšanai

5.1., 5.3., 5.4.: katra daļa – līdz 5 punktiem.

5.5. Piemērs – 3 punkti, neiespējamības pierādījums – līdz 7 punktiem.

6.1. Piemērs – līdz 4 punktiem, minimalitātes pierādījums – līdz 6 punktiem.

6.2. Katra daļa – līdz 5 punktiem (tikai atbilde – 1 punkts).

6.3. Katras iespējas piemērs – 3 punkti; pierādījums, ka citu iespēju nav – līdz 4 punktiem.

6.4. Atbilde – 3 punkti; pierādījumus, ka 86 neder – 3 punkti.

6.5. Katra daļa – 5 punkti.

7.1. Par piemēru – 4 punkti.

7.3. Katra daļa – 5 punkti.

7.4. a) daļa – 2 punkti, b) daļa – 3 punkti, c) daļa – 5 punkti.

8.1. Par atbildi bez pamatojuma – 1 punkts.

8.2. Piemērs ar 8 rūtiņām – 5 punkti.

8.3. Atbilde bez paskaidrojuma – 0 punktu. Par stratēģijām ar vairāk nekā 2 jautājumiem - ≤ 2 punkti. Par pierādījumu, ka ar 1 jautājumu nepietiek – 4 punkti.

8.4. Par spriedumu bez piemēriem – līdz 6 punktiem.

8.5. Par saknēm bez pamatojuma, ka citu nav – līdz 4 punktiem

---

9.1. Par speciālu gadījumu aplūkošanu (piem., ja a=b) – ne vairāk par 2 punktiem.

9.2. Par piemēru – 2 punkti; par pamatojumu, ka summa **vienmēr** ir 190 – 8 punkti.

9.3. Par a) daļu – 4 punkti, par b) daļu – 6 punkti.

9.4. Par pierādījumu, ka nav tādu naturālu skaitļu – 1 punkts.

9.5. Par a) daļu – 4 punkti, par b) daļu – 6 punkti.

10.1. Par atsevišķu piemēru aplūkošanu – 1 punkts.

10.3. Ja tikai pierādīts, ka ir 2 dalībnieki ar vienādu uzvaru skaitu – 3 punkti.

10.4. Par speciālgadījumu aplūkošanu (piem., ABCD – kvadrāts) ne vairāk kā 2 punkti.

10.5. Par piemēru – 3 punkti.

11.2. Par pierādījumu, ka neviena sakne nav ārpus intervāla – 3 punkti.

11.3. Par a) daļu – 4 punkti.

11.4. Par speciālgadījumu aplūkošanu – līdz 2 punktiem.

11.5. Par katru daļu 5 punkti.

12.2. Par a) daļu – 4 punkti.

12.3. Par atsevišķu piemēru aplūkošanu – līdz 1 punktam.

12.4. Par speciālgadījumu aplūkošanu – līdz 3 punktiem.

12.5. Par regulāra trijstūra aplūkošanu – 1 punkts.

Par rezultātu, ka jābūt 0 vai 2 nepāra pirmskaitļiem – 3 punkti.

Par secinājumu, ka divu nepāra pirmskaitļu gadījumā tiem jābūt vienādiem – 2 punkti.

Labu veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

A.Liepas NMS