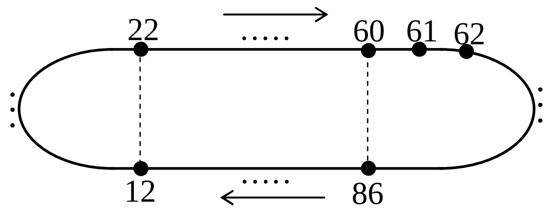
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 20 ieskaitot var izrakstīt katru tieši vienu reizi
a) rindā,
b) pa apli
tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu vismaz 10?

2. Pa sliežu ceļu, kam ir galos noapaļota taisnstūra forma, vienādos attālumos cits no cita kustas n rotaļu vagoniņi (pirmais vagoniņš no pēdējā ir tādā pašā attālumā kā pirmais no otrā). Tie sanumurēti ar naturāliem skaitļiem kustības virzienā, sākot ar 1. Kādā brīdī 12-ais vagoniņš atradās pretī 22-jam, bet 60-ais vagoniņš – pretī 86-jam (skat. 1.zīm.). Atrast n.

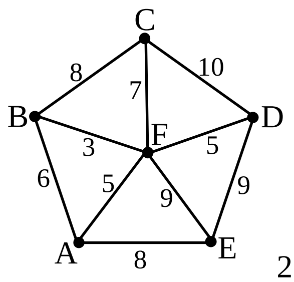


1. zīm.

3. Piecās kastītēs atrodas attiecīgi 1; 2; 3; 4; 5 konfektes. Ar vienu gājienu drīkst no vienas kastītes ielikt otrā tik daudz konfekšu, cik šajā otrajā kastītē jau ir (ja kastītē, no kuras ņemam konfektes, to ir pietiekami daudz). Kāds ir lielākais konfekšu daudzums, ko var savākt vienā kastītē, atkārtojot šādus gājienus?

4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Katra rūtiņa nokrāsota vienā krāsā. Ir zināms: ja a un b ir jebkuras divas dažādas izmantotās krāsas, tad var atrast tādas divas rūtiņas, kam ir kopīga mala un no kurām viena nokrāsota krāsā a, bet otra – krāsā b.
Kāds lielākais daudzums krāsu var būt izmantots?

5. Ciemi A, B, C, D, E, F savienoti ar ceļiem tā, kā tas redzams 2. zīm. (mērogs nav ievērots). Blakus katram ceļam norādīts tā garums kilometros.
a) vai pa ceļiem var veikt maršrutu, kas sākas pilsētā A, beidzas pilsētā A un kura kopgarums ir tieši 863 km?
b) vai to var izdarīt, ja ceļš DE ir slēgts?
(<u>Piezīme:</u> sākot braukt pa kādu ceļu, pa to jābrauc līdz galam.)



2. zīm.

6. klase

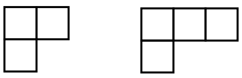
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kaut kāds naturāls skaitlis (starp tiem var būt arī vienādi). Visās rindās un visās kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir dažādas. Kāda ir mazākā iespējamā visā tabulā ierakstīto skaitļu summa?

2. Pa apli stāv n rūķīši ar seju pret centru. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo. Katrs no viņiem pasaka savam kaimiņam pa labi „Tu esi melis".

Vai tas iespējams, ja a) n=2004, b) n=2005?

3. Kvadrāts, kas sastāv no 6×6 vienādām kvadrātiskām rūtiņām, sagriezts gabalos. Katra gabala forma ir viena no tām, kādas redzamas 3.zīmējumā, pie tam ir gan vienas, gan otras formas gabali. Cik katras formas gabalu var būt? Gabali var būt novietoti arī citādi.



3. zīm.

4. Atrast minimālo naturālo skaitli n ar īpašību: ja uz tāfeles uzrakstīti n dažādi naturāli skaitļi, no kuriem neviens nepārsniedz 100, tad no uzrakstītajiem var izvēlēties tādus divus, kuru reizinājums dalās ar 21.

5. Dažas kompānijas ir piemānījušas citas. Ir zināms, ka:

- ja kompānija A ir piemānījusi kompāniju B, tad kompānija B nav piemānījusi kompāniju A,
- katra kompānija ir piemānījusi vismaz vienu citu,
- ja kompānija A ir piemānījusi kompāniju C, tad var atrast tādu kompāniju B, ka A ir piemānījusi B, bet B ir piemānījusi C.

Pierādīt, ka

a) katra kompānija ir piemānījusi vismaz 3 citas,

b) kompāniju skaits var būt tieši 7.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kādu mazāko daudzumu no skaitļiem 1; 2; 3; ...; 12; 13 var izsvītrot, lai katru divu atlikušo summa būtu salikts skaitlis?

2. Vai funkciju $y=2003x+4197$, $y=2004x+4198$ un $y=2005x+4199$ grafiki krustojas vienā punktā?

3. Mūsu rīcībā ir 100 vienādas trijstūrveida plāksnītes; katras plāksnītes malas garums ir 1. Vai no tām var salikt figūru, kuras apkārtmērs ir a) 56, b) 57? Jāizmanto visas plāksnītes.

Saliekot plāksnītes nedrīkst pārklāties. Katras divas plāksnītes vai nu nesaskaras nemaz, vai saskaras tikai ar vienu stūri, vai saskaras ar vienu veselu malu.

4. Naturālu skaitli n sauc par īpašu, ja tas ir vienāds ar četru savu dažādu dalītāju summu.

a) atrodiet kaut vienu īpašu skaitli,
b) pierādiet, ka īpašu skaitļu ir bezgalīgi daudz,
c) pierādiet, ka visi īpaši skaitļi ir pāra.

5. Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Ir zināms, ka vai nu visām tām masas ir vienādas, vai arī 4 monētām ir viena masa, bet 4 monētām – cita masa. Kā ar 3 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var noskaidrot, kura no iespējām pastāv īstenībā?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Ir zināms, ka skaitļa 2^{100} decimālajā pierakstā ir 31 cipars. Cik daudziem no skaitļiem 2^1; 2^2; 2^3; ...; 2^{99}; 2^{100} decimālais pieraksts sākas ar ciparu 1?

2. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 16 (dažādās rūtiņās – dažādi skaitļi). Rūtiņu sauc par izcilu, ja tajā ierakstītais skaitlis mazāks par augstākais vienā kaimiņu rūtiņā ierakstītu skaitli (divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala vai kopīgs stūris). Kāds lielākais daudzums rūtiņu var būt izcilas?

3. Andris iedomājās patvaļīgu naturālu skaitli n. Juris ar vienu gājienu var pateikt Andrim piecus dažādus naturālus skaitļus x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, un Andris pateiks Jurim **vienu** no skaitļiem nx_1, nx_2, nx_3, nx_4, nx_5 (bet nepaskaidros, **kura** reizinājuma vērtību viņš saka).

Ar kādu mazāko jautājumu skaitu Juris var noteikti noskaidrot n?

4. Taisne t nav nogriežņa AB vidusperpendikuls. Cik uz taisnes t var būt tādu punktu C, ka A, B un C ir vienādsānu trijstūra virsotnes?

5. Atrisināt vienādojumu

$$x^3(x^2-7)^2-36x=0.$$

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Dots, ka *a* un *b* – kaut kādi reāli skaitļi. Pierādīt, ka

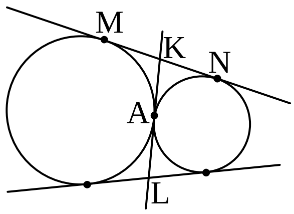
$$a^2 - ab + b^2 \geq 5a + 5b - 25$$

2. Kāda var būt četru tādu divciparu pirmskaitļu summa, kas sastādīti no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 9, izmantojot katru no tiem tieši vienu reizi?

3. Divas riņķa līnijas ar rādiusiem *R* un *r* ārēji pieskaras viena otrai punktā A. Taisne *t* pieskaras abām riņķa līnijām punktā A un krusto to kopējās ārējās pieskares punktos K un L.

a) pierādīt, ka MK=KN (skat. 1.zīm.);

b) izteikt KL ar *R* un *r*.



1. zīm.

4. Vai eksistē tādi 6 skaitļi, ka, aprēķinot visas iespējamās to summas pa diviem, iegūst visus naturālos skaitļus no 1 līdz 15 ieskaitot?

5. Ciparu virkni veido sekojoši: tās pirmie cipari ir 1; 2; 3; 4, bet katrs nākošais vienāds ar četru iepriekšējo summas pēdējo ciparu. (Tātad virkne ir 1; 2; 3; 4; 0; 9; 6; 9; ...)

a) Vai virknē kādreiz pēc kārtas parādīsies cipari 2; 0; 0; 5 tieši šādā secībā?

b) Vai virknē kādreiz pēc kārtas citur nekā sākumā parādīsies cipari 1; 2; 3; 4?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

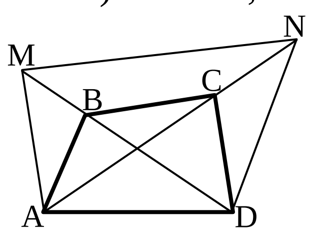
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Sākumā uz tāfeles uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 10, katrs vienu reizi. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru uz tāfeles uzrakstītu skaitļu grupu, nodzēst to un vietā uzrakstīt atlikumu, kādu dod nodzēsto skaitļu summa, dalot ar 3. Pēc vairākiem šādiem gājieniem uz tāfeles palika divi skaitļi; viens no tiem bija 8. Kāds varēja būt otrs skaitlis?

2. Apzīmēsim $f(x) = x^2 + px + q$. Pieņemsim, ka a, b, c, d, e –kāda piecstūra malu garumi. Dots, ka $f(a) = f(b+c+d+e)$.
Vai noteikti jāizpildās vienādībām
$$f(a+b) = f(c+d+e),\ f(a+b+c) = f(d+e),\ f(e) = f(a+b+c+d)?$$

3. Turnīrā piedalās n tenisisti ($n \geq 3$), katrs ar katru citu spēlē tieši vienu reizi. Tenisā neizšķirtu nav. Zināms, ka katrs turnīra dalībnieks izcīnīja vismaz vienu uzvaru. Pierādīt: pēc turnīra beigām var atrast tādus trīs dalībniekus un apzīmēt tos ar A, B un C, ka A uzvarējis pret B, B – pret C, bet C – pret A.

4. Uz izliekta četrstūra ABCD diagonāļu pagarinājumiem ņemti tādi punkti M un N, ka AM||DC un DN||AB (skat. 2.zīm.). Pierādīt, ka BC||MN.



2. zīm.

5. Uz papīra lapas uzrakstīti vairāki dažādi naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 100. Zināms, ka:
1) 1 un 100 ir uzrakstīti uz lapas,
2) ja n uzrakstīts uz lapas un $n \neq 1$, tad var atrast vai nu tādu uz lapas uzrakstītu skaitli x, ka $n=2x$, vai divus tādus uz lapas uzrakstītus skaitļus x un y, ka $n=x+y$.
Kāds mazākais daudzums skaitļu var būt uzrakstīti uz lapas?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

---

1. Aprēķināt $\sqrt{2005 \cdot 2003 \cdot 1999 \cdot 1997 + 36}$.

2. Aplūkosim visus kvadrātvienādojumus ar reāliem koeficientiem $x^2 + px + q = 0$, kam ir vismaz viena reāla sakne un kam $|p| \le 1$ un $|q| \le 1$. Kādu apgabalu uz skaitļu ass aizpilda visu šo kvadrātvienādojumu visas saknes?

3. Naturālu skaitli n sauksim par līdzsvarotu, ja tā visus naturālos dalītājus (ieskaitot 1 un pašu n) var sadalīt trīs daļās ar vienādām summām.

a) atrast kaut vienu līdzsvarotu skaitli,

b) pierādīt, ka līdzsvarotu skaitļu ir bezgalīgi daudz.

4. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā. Zināms, ka $\angle ABC=60°$ un BC=CD. Pierādīt, ka AB=BC+DA.

5. Kādā klasē ir n zēni un n meitenes. Katrai meitenei patīk x zēni. Katram zēnam patīk y meitenes. Pierādīt, ka:

a) ja $x+y>n$, tad noteikti var atrast tādu zēnu un tādu meiteni, kas patīk viens otram,

b) ja $x+y \le n$, tad var gadīties, ka šādu zēnu un meiteni atrast neizdodas.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 55. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^4}}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^5}}}}-\frac{1}{x^2+\frac{1}{x+\frac{1}{x^4+\frac{1}{x^3}}}}$$

2. Skaitļu virknē a_1; a_2; a_3; … zināms, ka $a_1=60$ un $a_{n+1}=a_n-\frac{1}{a_n}$ pie $n\geq1$, ja vien a_n ir definēts un $a_n\neq0$. Pierādīt:

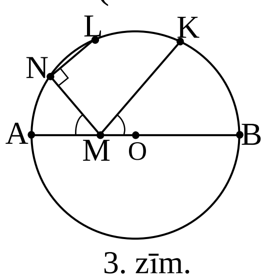
a) eksistē tāds k, ka $a_k\leq0$,

b) eksistē tāds k, ka $a_k\leq0$ un $k\leq2005$.

3. Naturāli skaitļi no 1 līdz n ($n>1$) kaut kādā secībā izrakstīti virknē, katrs vienu reizi. Ja virknē pirmais skaitlis ir k, tad pirmos k locekļus virknē uzraksta pretējā secībā; pārējo locekļu vietas nemaina.

Pierādīt: atkārtojot šādas operācijas, noteikti kādreiz virknes pirmajā vietā atradīsies vieninieks.

4. Dots, ka AB – riņķa līnijas diametrs; M – diametra punkts, kas atšķiras no A un B; N un K – tādi divi riņķa līnijas punkti vienā pusē no AB, ka $\angle NMA=\angle KMB$; L – tāds riņķa līnijas punkts, ka $NL\perp MN$ (skat. 3.zīm.).



3. zīm.

Pierādīt, ka LK||AB.

5. Trijstūra malu garumi izsakās ar pirmskaitļiem. Vai tā laukums var būt naturāls skaitlis? (Malas mēra metros, laukumu – kvadrātmetros.)