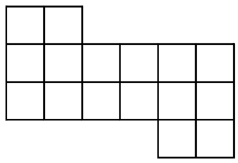
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

5. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Vai var pa apli izrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 12 katru tieši vienu reizi tā, lai katru divu blakus uzrakstītu skaitļu starpība būtu:
a) vismaz 5,
b) vismaz 6?

2. Figūra, kas attēlota 1.zīm., sastāv no vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai to var sagriezt divos gabalos tā, lai no šiem gabaliem varētu salikt vienu kvadrātu? Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām; gabali saliekot nedrīkst pārklāties un saliktā kvadrāta iekšpusē nedrīkst palikt tukšumi.



1.zīm.

3. Vai var uzrakstīt piecciparu skaitli, lietojot pa vienai reizei ciparus 1; 2; 3; 4; 5, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:
a) izsvītrojot ciparu 1, atlikušais skaitlis dalītos ar 1,
b) izsvītrojot ciparu 2, atlikušais skaitlis dalītos ar 2,
c) izsvītrojot ciparu 3, atlikušais skaitlis dalītos ar 3,
d) izsvītrojot ciparu 4, atlikušais skaitlis dalītos ar 4,
e) izsvītrojot ciparu 5, atlikušais skaitlis dalītos ar 5?

Vai var uzrakstīt sešciparu skaitli ar tādām pašām 5 īpašībām, lietojot pa vienai reizei ciparus 0; 1; 2; 3; 4; 5?

4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.
Vai var rūtiņās ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 16, katru tieši vienu reizi, lai katrs no astoņiem ierakstītiem skaitļiem būtu mazāks par visās savās kaimiņu rūtiņām ierakstītajiem, bet katrs no astoņiem pārējiem skaitļiem būtu lielāks par visās savās kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem?

5. Andris pieraksta datumu kā naturālu skaitli, bez atstarpes rakstot vienu aiz otra dienas numuru mēnesī un mēneša numuru gadā. Piemēram, 2.jūliju viņš pieraksta kā 27, bet 18.septembri – kā 189.
Cik ir tādu naturālu skaitļu, kas ir vairāk nekā viena datuma pieraksti Andra sistēmā?

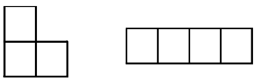
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

6. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kvadrāts sastāv no 5×5 vienādām baltām kvadrātiskām rūtiņām. Vai var nokrāsot melnā krāsā a) 1 rūtiņu, b) 4 rūtiņas tā, lai katrā no 3×3 rūtiņām sastāvošā kvadrātā būtu tieši viena melna rūtiņa?

2. Andrim ir figūriņas, kas sastāv no vienādiem kvadrātiņiem (skat. 2. zīm) – pa 10 katra veida.



2. zīm.

Vai viņš var salikt kvadrātu 7×7 rūtiņas, izmantojot a) 12 figūriņas; b) 14 figūriņas? Figūriņas nedrīkst pārklāties.

3. Pieci rūķīši sanesa savā namiņā kastes ar dārgakmeņiem. Katru kasti nesa tieši divi rūķīši. Vai var gadīties, ka katrs rūķītis piedalījās tieši triju kastu nešanā? Vai tas varētu notikt, ja kastu nešanā piedalītos tieši četri rūķīši?

4. Maijai bija 7 kartītes; uz katras no tām uzrakstīts pa ciparam, kas nepārsniedz 5. Viņa salika no kartītēm septiņciparu skaitli A, bet pēc tam – citu septiņciparu skaitli B un saskaitīja abus iegūtos skaitļus.
Vai var gadīties, ka summa arī ir septiņciparu skaitlis un visi cipari tajā ir nepāra?

5. Dotas 200 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Puse no tām sver pa 100 gramiem katra, puse – pa 101 gramu katra. Doti sviras svari bez atsvariem. Jāizveido divas monētu kaudzītes, lai to svari atšķirtos, bet monētu daudzumi tajās būtu vienādi. Ar kādu mazāko svēršanu skaitu Jūs to spējat izdarīt?
(**Piezīme.** Nav jācenšas pierādīt, ka Jūsu sasniegtais svēršanu skaits ir mazākais iespējamais.)

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

7. klase

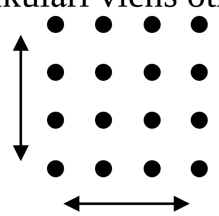
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Kurus naturālos skaitļus n var izsacīt formā $n = \frac{x}{y}$, kur $x = a^3$, $y = b^5$, a un b – naturāli skaitļi?

2. Rindā no sākuma bija uzrakstīti 2009 vieninieki. Ar vienu gājienu nodzēš divus pirmos rindā esošos skaitļus un tās otrā galā pieraksta abu nodzēsto skaitļu summu. Šādus gājienus atkārto, līdz rindā paliek tikai viens skaitlis.
a) cik gājienu tiks izdarīti?
b) atrast vienīgo palikušo skaitli.

3. Naturālam skaitlim a ir tieši 4 dalītāji, bet naturālam skaitlim b – tieši 6 dalītāji. Pierādiet, ka reizinājumam ab ir **vismaz** 9 dalītāji. Vai var gadīties, ka šim reizinājumam ir **tieši** 9 dalītāji?
(Piezīme: apskatām tikai tādus dalītājus, kas paši ir naturāli skaitļi. Pie skaitļa dalītājiem pieskaita gan viņu pašu, gan vieninieku.)

4. Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 16 punkti (skat. 3.zīm.). Kādu lielāko daudzumu punktu var nokrāsot sarkanus tā, lai nekādi divi nogriežņi, kam abi gali ir sarkani, viens gals kopīgs un kas vērsti kādā no bultiņu attēlotajiem virzieniem, nebūtu perpendikulāri viens otram?



3.zīm.

5. Sprīdītis ceļo triju rūķīšu pavadībā. Viņš zina, ka divi rūķīši vienmēr runā patiesību, bet trešais rūķītis dažreiz melo. Sprīdītis nezina, kurš rūķītis ir „neuzticams”. Kādā brīdī Sprīdītis var izvēlēties vienu no trim ceļiem. Viņš zina, ka pa vienu no ceļiem dienas gājiena attālumā atrodas Laimīgā Zeme. Tomēr ne viņš, ne rūķīši nezina, kurš ir šis ceļš. Kā Sprīdītis var nokļūt Laimīgajā Zemē, patērējot ceļā ne vairāk kā 3 dienas?
Pieņemam, ka visas pārrunas notiek momentāni.
(Piezīme. Ja nespējat tikt galā 3 dienās, aprakstiet „visekonomiskāko” no Jūsu atrastajiem plāniem.)

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

8. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Tabulā (skat. 4.zīm.) Katrīnai jāizvēlas 4 rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā tika izvēlēta tieši viena rūtiņa. Pierādiet: neatkarīgi no tā, kuras 4 rūtiņas saskaņā ar šiem noteikumiem Katrīna izvēlēsies, tajās ierakstīto skaitļu summa būs 64.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31

4.zīm.

2. Skaitļi a, b, c visi nav vienādi savā starpā. Pierādiet, ka $a^2 + b^2 + c^2 \neq ab + ac + bc$.

3. Atrodiet skaitļa $113^{113} - 19^{19}$ pēdējo ciparu.

4. Maijai bija vairāki akmeņi. Viņa tos visus kaut kā sadalīja pa sviras svaru abiem kausiem; svari nostājās līdzsvarā. Pēc tam viņa visus akmeņus sadalīja pa kausiem citādi; svari atkal nostājās līdzsvarā. Trešajā svēršanas reizē Maija uz kreisā svaru kausa atstāja tieši tos akmeņus, kas tur bija abās iepriekšējās reizēs, un līdzīgi uz labā kausa – tieši tos akmeņus, kas **tur** bija abās iepriekšējās reizēs. Pierādiet, ka svari atkal nostāsies līdzsvarā.

5. Trijstūrī ABC divas malas ir vienādas savā starpā, un $\angle ABC = 20°$. Pierādiet, ka $3 \cdot AC > AB$.

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

9. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Trijstūrī ABC ar h_a, h_b un h_c apzīmēti to augstumu garumi, kas vilkti attiecīgi no virsotnēm A, B, C. Dots, ka $h_a \geq 5$, $h_b \geq 12$, $h_c \geq 13$.
Kāds ir mazākais iespējamais ΔABC laukums?

2. Kuri četrciparu naturāli skaitļi vienādi ar savu divu pēdējo ciparu veidotā naturālā skaitļa kvadrātu?

3. Divas riņķa līnijas krustojas. To rādiusu garumi ir R un r, bet attālums starp to centriem ir d. Vienā no abu riņķa līniju krustpunktiem tām abām novilktas pieskares. Pierādīt: šīs pieskares ir perpendikulāras viena otrai tad un tikai tad, ja $R^2 + r^2 = d^2$.

4. Kvadrātvienādojumam $x^2 + px + q = 0$ ir divas dažādas saknes, kas abas pieder intervālam [-1;1]. Pierādīt, ka katram reālam skaitlim x pastāv nevienādība $x^2 + px + q \geq -1$

5. Pieņemsim, ka $n \geq 3$, n – naturāls skaitlis. Aplūkosim patvaļīgu n cilvēku grupu.

a) pierādīt, ka šajā grupā var atrast divus tādus cilvēkus A un B, kam starp pārējiem ir vienādi paziņu daudzumi,

b) rūķītis Muriburis apgalvo: katriem diviem šīs grupas cilvēkiem A un B, kam šajā grupā paziņu daudzumi ir vienādi, var atrast vai nu tādu cilvēku C, kas pazīst gan A, gan B, vai arī tādu cilvēku D, kas nepazīst ne A, ne B. Vai Muriburis runā patiesību, ja n=4? Bet ja n=2009?

<u>Piezīme</u>: uzskatām, ka neviens nepazīst pats sevi un, ja X pazīst Y, tad arī Y pazīst X.

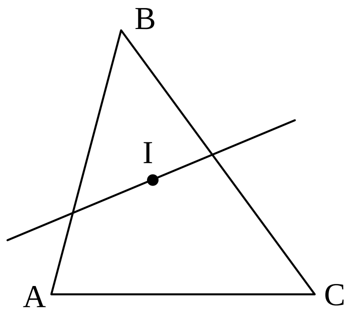
LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

10. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Atrodiet mazāko naturālo skaitli, kuru var izsacīt gan kā 11, gan kā 12, gan kā 13 pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summu.

2. Caur trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centru I novilkta taisne t tā, kā parādīts 1. zīm. Tā dala trijstūra laukumu uz pusēm. Pierādīt, ka tā dala uz pusēm arī trijstūra perimetru.



1. zīm.

3. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi, a^2 dalās ar b un b^2 dalās ar a. Pierādīt, ka $(a+b)^3$ dalās ar $a \cdot b$. Vai noteikti $(a+b)^2$ dalās ar $a \cdot b$?

4. Atrisināt vienādojumu $\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}=\frac{1}{2}(x+y+z)$ reālos skaitļos.

5. Kvadrātiska režģa formā izvietotas 100 spuldzes. Katra spuldze var būt vai nu ieslēgta, vai izslēgta. Pieskaroties jebkurai spuldzei (apzīmēsim to ar A), tā maina savu stāvokli (no ieslēgta uz izslēgtu vai otrādi). Vienlaicīgi savu stāvokli maina arī visas tās spuldzes, kuras ar A ir vai nu vienā rindā, vai vienā kolonnā.
Sākumā visas spuldzes ir izslēgtas. Ar kādu mazāko pieskārienu skaitu var panākt, lai tās vienlaicīgi visas būtu ieslēgtas?

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

11. klase

Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

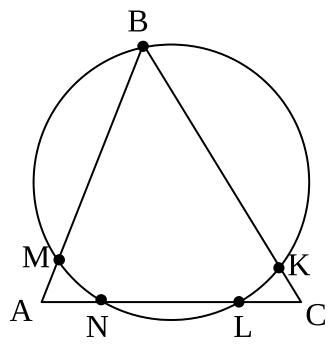
1. Regulāra n-stūra virsotnēs ierakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz n (katrā virsotnē cits skaitlis) ar īpašību: ja A, B, C – trīs n-stūra virsotnes un AB=AC, tad virsotnē A ierakstītais skaitlis vai nu lielāks par **abiem** skaitļiem, kas ierakstīti virsotnēs B un C, vai arī mazāks par tiem abiem.

Vai var būt, ka a) $n=8$, b) $n=7$, c) $n=10$, d) $n=16$?

2. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{y}=7$.

3. Atrisināt nevienādību $\left|\left|\left|2-x\right|-x\right|-9\right| \le 2009$.

4. Riņķa līnija iet caur regulāra trijstūra ABC virsotni B un krusto tā malas, kā parādīts 2. zīm. Pierādīt, ka AM + CL = AN + CK.



2. zīm.

5. Telpā doti 7 punkti; nekādi 3 no tiem neatrodas uz vienas taisnes un nekādi 4 neatrodas vienā plaknē. Katri divi punkti savienoti ar baltu vai sarkanu nogriezni. Pierādīt: ir vismaz divi trijstūri, katram no kuriem visas 3 malas ir nokrāsotas vienādi (varbūt vienam trijstūrim tās visas ir baltas, bet otram – sarkanas).

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola
Latvijas 59. matemātikas olimpiādes 2. posma uzdevumi

12. klase

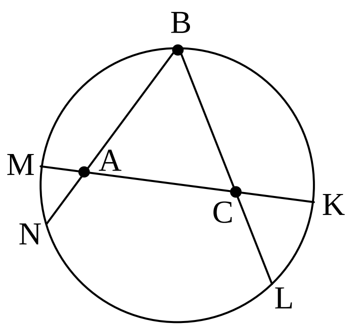
Katru uzdevumu vērtē ar 0 – 10 punktiem.

1. Pierādīt, ka visiem reāliem skaitļiem x un y pastāv nevienādība
$$\cos(x^2) + \cos(y^2) - \cos(xy) < 3.$$

2. Dots, ka p ir pirmskaitlis un $n = (p^2 - 1)(p^2 - 4) + 9$. Kāda ir mazākā iespējamā n ciparu summa? Kuriem p tā tiek sasniegta?

3. Atrisināt vienādojumu $x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 4 = 2 \cdot \left(\sqrt{2x+1} + \sqrt{2y+1}\right)$ pozitīvos reālos skaitļos.

4. Regulāra trijstūra ABC virsotne B atrodas uz riņķa līnijas; tā malu pagarinājumi krusto riņķa līniju, kā parādīts 3. zīm. Pierādīt, ka AM + CL = AN + CK.



3. zīm.

5. Telpā doti 4 punkti, kas visi neatrodas vienā plaknē. Cik ir paralēlskaldņu, kam visi šie punkti ir virsotnes?