40. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1989./ 90. m.g.

UZDEVUMI

5. klase

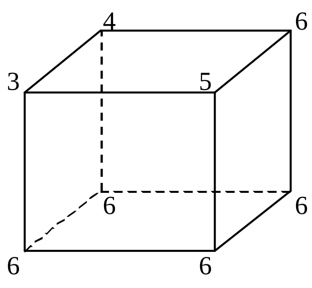
90.1. Jānis, Juris, Andris, Pēteris un Kārlis katrs iedomājās pa skaitlim; tie visi bija dažādi. Jāņa skaitlis bija lielāks par diviem citiem, Kārļa skaitlis – par četriem, Pētera skaitlis – par vienu, bet Jura skaitlis – ne par vienu citu iedomāto skaitli.
Par cik iedomātajiem skaitļiem bija lielāks Andra skaitlis.

90.2. Vai uz lineāla var atzīmēt 4 punktus *A*, *B*, *C*, *D* tā, lai seši attālumi starp tiem būtu 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4cm, 5 cm, 6 cm?
Visi attālumiem jābūt dažādiem.

90.3. Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Trim no tām ir vienādas masas, trim citām – arī vienādas, bet mazākas nekā trim pirmajām. Doti sviru svari bez atsvariem. Kā atrast vienu (vienalga, kuru) no smagākajām monētām, lietojot svarus tikai divas reizes.

90.4. Aizstāt vārdos VIENS, DIVI, TRĪS, ČETRI, PIECI burtus ar cipariem (vienādus burtus ar vienādiem, dažādus ar dažādiem; I un Ī, kā arī C un Č uzskatām par vienādiem burtiem) tā, lai iegūto 5 skaitļu summa būtu lielākā iespējamā.

90.5. Katrā kuba virsotnē ar zilu krāsu bija uzrakstīts vesels pozitīvs skaitlis. Vilnis katrā virsotnē ar sarkanu krāsu ierakstīja to 3 zilo skaitļu summu, kas atrodas trijās šai virsotnei blakus esošās virsotnēs; pēc tam zilos skaitļus nodzēsa. Sarkanie skaitļi izvietojās tā, kā parādīts 1. zīmējumā.



1. zīm.

Atrast sākumā ierakstītos zilos skaitļus.

Paskaidrojums: saka, ka kuba virsotnes atrodas blakus, ja tās savienotas ar šķautni.

6. klase

90.6. Izmantojot katru ciparu tieši vienu reizi, uzrakstīt vienu vai vairākus skaitļus decimālajā pierakstā tā, lai uzrakstīto skaitļu summa būtu lielākā iespējamā.

90.7. Dots, ka $|a+b|>|a-b|$ un $|a-c|>|a+c|$.
Pierādīt, ka $|b-c|>|b+c|$.

90.8. Koordinātu plaknē atzīmēti 10 punkti. Caur katru no tiem novilktas 2 taisnes perpendikulāri koordinātu asīm.
Vai var gadīties, ka pavisam novilktas tikai 7 dažādas taisnes?
Bet tikai 6 dažādas taisnes?

90.9. Slēpošanas trases starts un finišs atrodas vienā punktā. Trase vairākkārt krusto pati sevi. Pirms sacensībām tiesnesis izbrauca pa trasi un katru reizi, šķērsojot krustojumu, iesprauda pie tā karodziņu: pirmo reizi ar numuru 1, otro reizi – ar numuru 2, utt. Uzzīmēt tādu trasi, kuru izbraucot, pie krustojumiem esošo karodziņu pāri būtu (1, 6), (2, 7), (3, 10), (4, 9), (5, 12), (8, 11).
Pietiek uzzīmēt vienu piemēru.

90.10. Plaknē uzzīmētas 4 taisnes; nekādas divas no tām nav paralēlas un nekādas trīs nekrustojas vienā punktā. Vai var sanumurēt taišņu krustpunktus ar skaitļiem no 1 līdz 6 (katru punktu ar citu skaitli) tā, lai uz visām taisnēm numuru summa būtu viena un tā pati?

7. klase

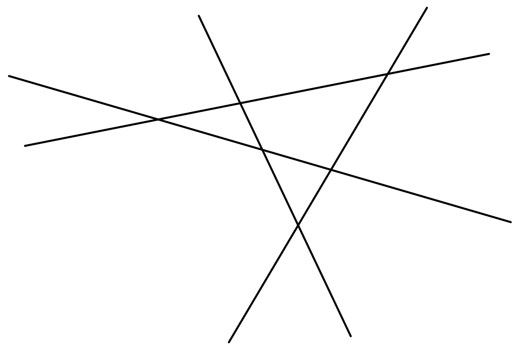
90.11. Vai 5 taisnēm var būt 11 dažādi krustpunkti?

90.12. Ar $[x]$ apzīmē skaitļa *x* veselo daļu (lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz *x*).
Piemēram, $\left[2\tfrac{1}{3}\right]=2$, $[5]=5$.
Vai vienādība $[x]+[x]=[2x]$ ir identitāte?

90.13. Sadalīt skaitli 1989 divos veselos pozitīvos saskaitāmajos, kas tieši proporcionāli diviem no skaitļiem 1, 4, 9, 16, 25, 36, 64, 81. Atrodiet divus veidus, kā to izdarīt.

90.14. Dota kvadrātveida tabula 3×3 rūtiņas. Vai var rūtiņās ierakstīt pa vienam ciparam no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā citu ciparu) tā, lai katrā kolonnā un katrā rindiņā ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar 4 ?

90.15. Četras taisnes, kas parādītas 2. zīm., sadala plakni 11 daļās.



2. zīm.

Ierakstīt katrā no tām veselu skaitli, kas nav 0, tā, lai gan vienā, gan otrā pusē katrai taisnei visu ierakstīto skaitļu summa būtu 0. Starp skaitļiem var būt arī vienādi.

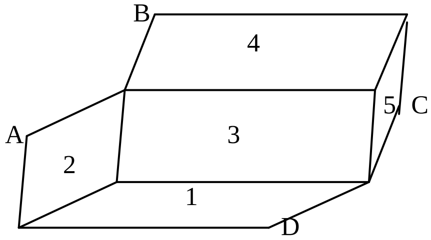
8. klase

90.16. Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 1989x - 1988y = 1 \\ 1990x - 1989y = 2. \end{cases}$$

90.17. Sadalīt skaitļus no 1 līdz 15 sešās grupās tā, lai visās grupās skaitļu summas būtu vienādas. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

90.18. Četrstūri, kas 3. zīm. apzīmēti ar cipariem no 1 līdz 5, ir paralelogrami. Pierādīt, ka *ABCD* arī ir paralelograms.



3. zīm.

90.19. Daļas $\frac{a}{b}$ skaitītājs un saucējs ir veseli pozitīvi skaitļi. Pieskaitot gan skaitītājam, gan saucējam 1, daļas vērtība palielinās. Pierādīt, ka, izdarot to vēlreiz, daļas vērtība atkal palielināsies.

90.20. Kvadrātveida tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Katrā rūtiņā jāieraksta viens no skaitļiem 0, 1, -1. Aprēķinot visas summas pa rindiņām un pa kolonnām, tām visām jābūt vienādām.
Vai to var izdarīt?

9. klase

90.21. Dota kvadrātveida tabula ar izmēriem 5×5 rūtiņas. Atzīmēt tajā 5 rūtiņu centrus tā, lai taisnes, kas caur atzīmētajiem punktiem novilktas paralēli tabulas malām un diagonālēm, visas būtu dažādas. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

90.22. Doti 7 nogriežņi ar garumiem $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$.
Cik ir dažādu taisnleņķu trijstūru, kam katra mala vienāda ar vienu no šiem nogriežņiem ?

90.23. Dotas divas aritmētiskās progresijas $a_1, a_2, a_2, \ldots$ un $b_1, b_2, b_3, \ldots$. Vai var vienlaicīgi pastāvēt nevienādības

$$a_1 < b_1,\ a_{100} > b_{100},\ a_{200} < b_{200}.$$

90.24. Dots naturāls skaitlis $n > 5$. Pierādīt, ka n var izsacīt kā pirmskaitļa un salikta skaitļa summu.

90.25. Dots, ka $x + y + z \geq xyz$. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$.

10. klase

90.26. Vai kvadrātveida tabulā ar izmēriem 4×4 rūtiņas var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai visās rindiņās un kolonnās ierakstīto skaitļu reizinājumi būtu vienādi?

90.27. Atrast skaitļa $\sin 1989$ zīmi. Dots, ka $\pi = 3{,}14159265$.

90.28. Vai plakne var šķelt piecas trijstūra piramīdas šķautnes to iekšējos punktos?

90.29. Trijstūrī *ABC* novilkta mediāna *BM*. Vai var gadīties, ka trijstūrī *ABM* ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir divas reizes lielāks par trijstūrī *CBM* ievilktās riņķa līnijas rādiusu?

90.30. Dots, ka $a \geq b \geq c > 0$, $a + b + c \leq 1$.

Pierādīt, ka $a^2 + 3b^2 + 5c^2 \leq 1$.

11. klase

90.31. Trijstūrī *ABC* mediānu garumu summa vienāda ar augstumu garumu summu. Pierādīt, ka trijstūris ir regulārs.

90.32. Atrast kaut vienu otrās pakāpes polinomu $P(x)$, lai vienādība $(P'(x))^2 = P(x)$ būtu identitāte. Vai eksistē tāds trešās pakāpes polinoms?

90.33. Vai no regulāra 13-stūra virsotnēm var izvēlēties 4 virsotnes tā, lai visi attālumi starp tiem būtu dažādi?

90.34. Dots, ka *n* dalās ar 6, *n* – naturāls skaitlis. Pierādīt, ka *n* var sadalīt triju veselu pozitīvu saskaitāmo summā tā, lai katriem diviem no tiem lielākais kopīgais dalītājs būtu 1.

90.35. Dots, ka $0 < x < \frac{\pi}{2}$ un $0 < y < \frac{\pi}{2}$. Zināms, ka $\sin x + \operatorname{tg}^3 x = \sin y + \operatorname{tg}^3 y$. Pierādīt, ka $x = y$.

12. klase

90.36. Vai trijstūri *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* visi var būt vienādi?

90.37. Kādas veselas vērtības var pieņemt izteiksme $\sin x + \sin 2x$?

90.38. Zināms, ka divu dotu racionālu skaitļu summa un reizinājums ir veseli skaitļi. Pierādīt, ka dotie skaitļi paši ir veseli. Vai apgalvojums paliek spēkā, ja nav zināms, ka dotie skaitļi ir racionāli?

90.39. Plauktā atrodas 6 sējumu kopotie raksti. Sākumā sējumi atrodas pareizā kārtībā. Jānis katru dienu maina vietām divus blakus stāvošus sējumus. Vai viņš to var darīt tā, lai kādā laika periodā realizētos visi iespējamie izkārtojumi, katrs tieši vienu reizi?

90.40. Kuba šķautnes garums ir 1. To projicē plaknē Q un atrod projekcijas laukumu. Pēc tam kubu projicē uz taisnes t, kas perpendikulāra plaknei Q, un atrod projekcijas garumu. Pierādīt, ka abu projekciju skaitliskās vērtības ir vienādas.