41. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1990./ 91. m.g.

ATRISINĀJUMI

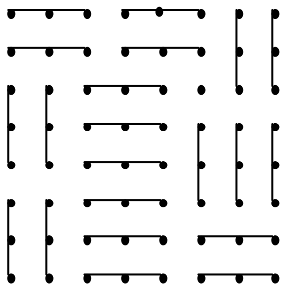
91.1. Izdalām skaitli 1990 ar 3 un ar 4 ar atlikumu

$1990:3=663,\ \text{atl.}1$

$1990:4=497,\ \text{atl.}\,2$.

Tātad trijstūrus var izveidot par $663-497=166$ vairāk.

91.2. Kā parādīts 4. zīmējumā, var novilkt 21 nogriezni.



4. zīm.

Vairāk nogriežņus novilkt nevar, jo tad tie pārklātu vismaz $22\cdot 3=66$ punktus, bet režģī ir tikai 64 punkti.

91.3. Nē, nevar. Skaidrs, ka ņemot mazākā skaitļa pēdējo ciparu un pareizinot to ar 7, jāiegūst skaitlis, kura pēdējais cipars ir lielākā skaitļa pēdējais cipars. Reizinot ciparus 1, 4, 6, 9 ar 7 iegūstam skaitļus 7, 28, 42, 63. Neviens no šo skaitļu pēdējiem cipariem nav vienāds ar cipariem 1, 4, 6, 9; tātad nevar būt lielākā skaitļa pēdējais cipars.

91.4. Jā, noteikti var. Paņemsim jebkurus divus zīmuļus *A* un *B*, kas atšķiras pēc garuma. Pastāv divas iespējas:

1) To krāsas ir dažādas; tad vajadzīgie zīmuļi atrasti.

2) To krāsas ir vienādas (teiksim, pirmās krāsas zīmuļi). Tā kā krāsas ir vairākas, tad varam paņemt otrās krāsas zīmuli *C*. Skaidrs, ka tādā gadījumā der vai nu zīmuļu paris *C*, *A*, vai nu pāris *C*, *B*.

91.5. Novietojam uz katra svaru kausa pa divām monētām. Ja kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir starp šīm četrām. Ja ir, tad starp atlikušajām četrām. Atrastas četras monētas, starp kurām ir atšķirīgā.

Novietojam uz kausiem pa vienai no tām. Ja kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir starp šīm divām. Ja ir, tad starp atlikušajām divām. Atrastas divas monētas, starp kurām ir atšķirīgā.
Vienu no tām salīdzinām ar kādu no atrastajām īstajām un noskaidrojam, kura no atlikušajām divām ir atšķirīgā.

91.6. a) Var. Ņemsim 5 pozitīvus skaitļus un 5 negatīvus. Tad negatīvu reizinājumu iegūsim, ja viens no reizinātājiem ir pozitīvs, bet otrs negatīvs. Tādu reizinājumu skaits ir $5 \times 5 = 25$.
b) Var. Ņemsim 4 pozitīvus skaitļus, 3 negatīvus un 3 nulles.
c) Nevar. Negatīvo reizinājumu skaits ir pozitīvo skaitļu skaita a un negatīvo skaitļu skaita b reizinājums. Bet skaitli 13 nevar sadalīt divos reizinātajos, kas abi nepārsniedz 10.

91.7. Var būt tieši 9 dažādas starpības. Piemēram, var izvēlēties skaitļus 1, 2, 3, ..., 10. Vismaz 9 dažādas starpības noteikti būs; tās var iegūt no lielākā skaitļa atņemot visus citus.

91.8. Nē, nevar. Pirmskaitlis 43 nevar sekot ne aiz viena cita pirmskaitļa (nav pirmskaitļu, kuru pēdējais cipars ir 4). To varētu ņemt kā pirmo, taču to pašu var teikt par pirmskaitli 47.

91.9. Punkti veido kvadrāta kontūru, kura virsotnes atrodas punktos ar koordinātēm
(5; 4), (11; 4), (8; 1), (8; 7).

91.10. Salīdzinām $A + B$ ar $C + D$ (uz viena svaru kausa uzliktas monētas *A* un *B*, uz otra *C* un *D*).
1) $A + B = C + D$; salīdzinām *A* ar *B*.

a) $A = B$; tad vieglākās monētas ir *E* un *F*.

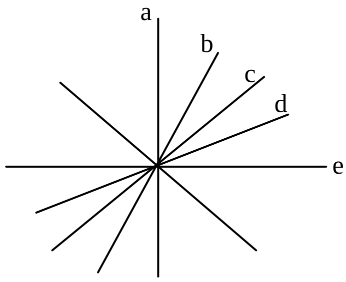
b) $A > B$; tad viena no vieglākajām monētām ir *B*. Salīdzinot *C* ar *D*, noskaidrojam otru vieglāko monētu.

2) $A + B > C + D$ (gadījums $A + B < C + D$ ir analoģisks); *A* un *B* ir smagākās monētas. Salīdzinām *C* un *D*.

a) $C = D$; tad vieglākās monētas ir *C* un *D*.

b) $C > D$, tad viena no vieglākajām monētām ir *D*. Salīdzinot *E* ar *F*, noskaidrojam otru vieglāko monētu.

91.11. Skat. 5. zīm.



5. zīm.

Koordinātu asu pāris var būt tikai (a,e) vai (c,f)(jo tie ir vienīgie savstarpēji perpendikulārie taišņu pāri). Otrais gadījums nav iespējams, jo triju funkciju grafikiem jāiet caur pirmo un trešo kvadrantu.
Tātad koordinātu asis ir *a* un *e*. Skaidrs, ka c ir funkcijas $y = x$ grafiks un f ir funkcijas $y = -x$ grafiks.

Kura no taisnēm *b* un *d* ir kuras atlikušās funkcijas grafiks, noskaidrot nevar, jo nav zināms, kura no taisnēm *a* un *e* ir abscisu ass.

91.12. Tā kā vienādojumam $ax = b$ nav atrisinājuma, tad $a = 0$ un $b \neq 0$.
Tātad vienādojumam $bx = a$ ir viens atrisinājums $x = 0$.

91.13. Pēc pirmās svītrošanas paliek cipari, kuru kārtas numuri dalās ar 2, pēc otrās, kuru kārtas numuri dalās ar 4, ... , pēc devītās – ar 512. Tāds cipars ir tikai viens – tas, kas atrodas 512.vietā. Tas ir cipars 2.

91.14. Nē. Visu daļu garumi dalās ar 3, bet 50 ar 3 nedalās.

91.15. Nē. Lūk pretpiemērs ar četriem zīmuļiem:

1. zīmulis – (zaļš, garš, apaļš),
2. zīmulis – (zaļš, īss, kantains),
3. zīmulis – (sarkans, garš, kantains),
4. zīmulis – (sarkans, īss, apaļš).

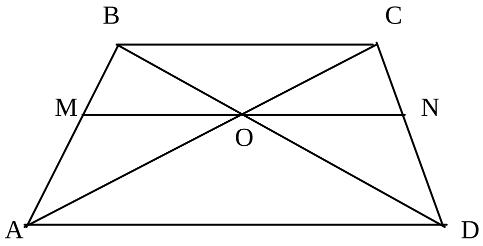
91.16. $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2 + b^2)$.

91.17. Vienādība $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = 25$ ir ekvivalenta nevienādībām

$$25 \leq \sqrt{n} < 26 \quad \Leftrightarrow \quad 25^2 \leq n < 26^2.$$

Tātad šādu naturālu skaitļu skaits ir $26^2 - 25^2 = 51$.

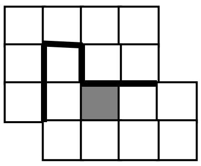
91.18. Nē, nevar. Pieņemsim, ka tāda situācija izveidojusies (skat. 6. zīmējumu).



6. zīm.

Tā kā $BM = AM$ un $MO||BC$, tad pēc Talesa teorēmas $AO = OC$. Līdzīgi pierāda, ka $DO = OB$. Tātad četrstūra $ABCD$ diagonāles krustojoties dalās uz pusēm, no tā secinām, ka četrstūris ir paralelograms; tātad nav trapece.

91.19. Skat. 7. zīmējumu.



7. zīm.

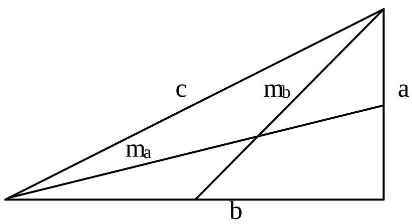
91.20. a) 1, 2 un 3;

b) 1,2,3 un 6;

c) 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384.

Katru nākošo skaitli iegūst ka visu iepriekšējo summu.

91.21. Skat 8. zīmējumu.



8. zīm.

No Pitagora teorēmas

$m_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $m_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Tātad

$$m_b^2 + m_a^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 + b^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 =$$
$$\frac{5}{4}\left(a^2 + b^2\right) = \frac{5}{4}c^2 = 125.$$

91.22. Doto nevienādību pārveidojam formā

$$\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)} < 0.$$

Risinot ar intervālu metodi, iegūst atrisinājumu $x \in (-3;-2) \cup (-2;-1)$.

91.23. Dotajai aritmētiskajai progresijai pieder visi šādi skaitļi

$$199\underbrace{100\ldots00}_{k}1990.$$

Visiem tiem ciparu summa ir 39.

91.24. Apzīmēsim cilvēkus ar *A*, *B*, *C*, *D*. var izveidot 8 komisijas:

$$A,\ AB,\ AC,\ AD,\ ABC,\ ABD,\ ACD,\ ABCD.$$

Vairāk komisijas izveidot nevar: 4 elementu kopai ir 16 apakškopas, un, ja kādu apakškopu izvēlas par komisiju, tad tās papildinājumu par komisiju ņemt vairs nevar.

91.25. Izkrāsosim kvadrātu šaha galdiņa kārtībā. Pēc rūtiņas izgriešanas vienas krāsas laukums paliek pārsvarā, bet katrs trijstūris pārklāj vienādu balto un melno laukumu. Tātad prasītā sagriešana nav iespējama.

91.26. Funkcija $f(x) = a + b\sin x$ pieņem savu lielāko un mazāko vērtību tajos punktos, kuros pieņem savu lielāko un mazāko vērtību funkcija $\sin x$. Tikai ne obligāti minimumam atbilst minimums; tas ir atkarīgs no *b* zīmes.

Ņemot $\sin x = 1$ un $\sin x = -1$, iegūstam divas iespējas:

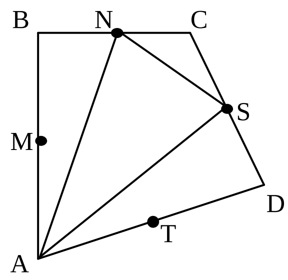
$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=5 \end{cases}.$$

Atbilde: $a = 4{,}5 \quad b = 0{,}5$ vai $a = 4{,}5 \quad b = -0{,}5$.

91.27. Ja kubu šķeļ ar plakni, kas iet caur tā centru perpendikulāri galvenajai diagonālei, tad šķēlumā veidojas sešstūris un plakne šķeļ 6 kuba šķautnes.

Ja plakne šķeltu vairāk par 6 šķautnēm, tad šķēlumā veidotos daudzstūris ar vismaz 7 malām. Bet katrai šķēluma daudzstūra malai atbilst kāda no kuba skaldnēm. Taču kubam ir tikai 6 skaldnes.

91.28. Skat. 9. zīmējumu.



9. zīm.

Tā kā N un S ir malu viduspunkti, tad

$$S_{ANS} = L - S_{ABN} - S_{DSA} - S_{CNS} =$$
$$L - \frac{1}{2}S_{ABC} - \frac{1}{2}S_{ACD} - \frac{1}{4}S_{CDB} =$$
$$\frac{1}{2}L - \frac{1}{4}S_{CDB}.$$

Līdzīgas formulas izpildās arī pārējiem trim aplūkojamiem trijstūriem. Izmantojot šīs formulas, aprēķinām prasīto summu.

$$S_{ANS} + S_{BST} + S_{CTM} + S_{DMN} =$$
$$\left(\frac{1}{2}L - \frac{1}{4}S_{CDB}\right) + \left(\frac{1}{2}L - \frac{1}{4}S_{ACD}\right) + \left(\frac{1}{2}L - \frac{1}{4}S_{ABD}\right) + \left(\frac{1}{2}L - \frac{1}{4}S_{ABC}\right) = \frac{3}{2}L.$$

91.29. Izmantojot nevienādību starp divu skaitļu vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko, iegūstam:

$$x + y \geq 2\sqrt{xy} > 2\sqrt{x+y}.$$

No šejienes seko, ka $\sqrt{x+y} > 2$ un $x + y > 4$.

91.30. Aprēķināsim, kādus atlikumus pēc moduļa 7 dod veselu skaitļu kvadrāti:

$$0^2 \equiv 0 \pmod 7,$$
$$1^2 \equiv 1 \pmod 7,$$
$$2^2 \equiv 4 \pmod 7,$$
$$3^2 \equiv 2 \pmod 7,$$
$$4^2 \equiv 2 \pmod 7,$$
$$5^2 \equiv 4 \pmod 7,$$
$$6^2 \equiv 1 \pmod 7.$$

Aplūkoti visi atlikumi pēc moduļa 7; redzam, ka iespējami tikai atlikumi 0, 1, 2, 4.

Dots, ka $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7$. Skaitļi a^2 un b^2 pēc moduļa 7 var pieņemt tikai norādītās vērtības. Vienīgais veids kā summā iegūt $0 \pmod 7$ ir $0+0$. Tas nozīmē, ka *a* un *b* dalās ar 7.; tad a^2 un b^2 dalās ar 49 un, protams arī $a^2 + b^2$ dalās ar 49.

91.31. Izmantojot atvasināšanas formulas, iegūstam

$$(h \cdot g)'' = (h' \cdot g + h \cdot g')' = (h' \cdot g)' + (h \cdot g')' =$$
$$(h'' \cdot g + h' \cdot g') + (h' \cdot g' + h \cdot g') =$$
$$h'' \cdot g + 2h'g' + h \cdot g''.$$

91.32. No 2 līdz 13 sastopami 6 pirmskaitļi: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

Pierādīsim, ka vairāk par 6 pirmskaitļiem būt nevar. No 1 līdz 12 ir 5 pirmskaitļi. Ja mazākais, no grupas skaitļiem ir lielāks par 2, tad katrs pāra skaitlis šajā grupā ir salikts skaitlis. Pāra skaitļi katrā grupā ir 6; tātad grupā nevar būt vairāk par 6 pirmskaitļiem.

91.33. Dotā vienādība ir iespējama tikai, ja $\sin x = 0$ un $\sin \sqrt{2}x = 0$ (jo abi saskaitāmie ir nenegatīvi). Iegūstam:

$$x = \pi n, \quad \sqrt{2}x = \pi m, \quad n, m \in Z.$$

Ja $x \neq 0$, tad no šīm vienādībām seko, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$; tātad ir racionāls skaitlis; tā ir pretruna. Vienīgā atlikusī vērtība $x = 0$ ir vienādojuma atrisinājums.

91.34. Uzskatīsim, ka dotās plaknes ir koordinātu plaknes telpā. Punktu koordinātes apzīmēsim ar $A(x_1, y_1, z_1)$ un $B(x_2, y_2, z_2)$. Tā kā *A* un *B* atrodas vienā oktantā, tad punktu atbilstošo koordināšu zīmes sakrīt. Tātad

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 > 0.$$

Tā kā aplūkojamo vektoru skalārais reizinājums ir pozitīvs, tad leņķis starp tiem ir šaurs.

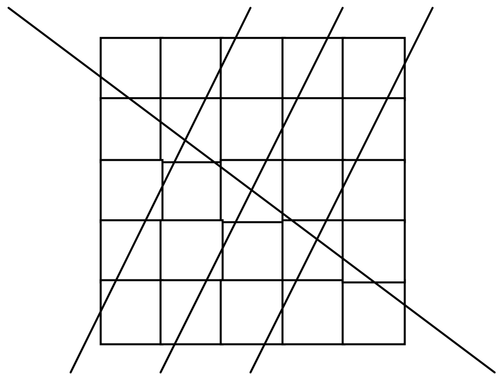
91.35. Apzīmēsim stundu rādītāju galapunktus ar *A* un *B*, bet ciparnīcu centrus ar O_1 un O_2. Tad

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O_1O_2} + \left(\overrightarrow{O_2B} - \overrightarrow{O_1A}\right).$$

Vektora $b = \overrightarrow{O_1O_2}$ garums ir fiksēts. Arī vektora $a = \left(\overrightarrow{O_2B} - \overrightarrow{O_1A}\right)$ garums ir fiksēts (lai to pamatotu jāatliek abi vektori $\overrightarrow{O_2B}$ un $\overrightarrow{O_1A}$ no viena punkta; leņķis starp tiem ir fiksēts). Tātad mazākais attālums realizēsies, kad vektori *a* un *b* būs pretēji vērsti, bet lielākais, kad tie būs vienādi vērsti. No šejienes seko, ka attālums starp ciparnīcu centriem ir $\frac{1}{2}(m+M)$.

91.36. $x^2+y^2=x^2+(1-x)^2=2x^2-2x+1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$.

91.37. To var izdarīt. Skat. 10. zīmējumu.



10. zīm.

91.38. Tā kā $F'(x)=G'(x)$, tad $F(x)$ un $G(x)$ atšķiras par konstanti. Tātad

$$F(5)-G(5)=F(3)-G(3)=-3.$$

91.39. Apzīmēsim krītošā stara virziena vektoru ar (a,b,c). Pēc pirmās atstarošanās uz pretējo mainās viena koordināta, pēc otrās – otra, pēc trešās – trešā. Rezultātā iegūstam pretēji vērstu vektoru.

91.40. Pieņemsim, ka taisnstūra paralēlskaldnis salikts no ķieģeļiem. 429 ķieģeļos ir tieši $11\times12\times13$ vienības kubiņi. Izkrāsosim paralēlskaldņa kubiņus telpiskā šahveida kārtībā. Katrs ķieģelis satur vai nu 3 melnus kubiņus, vai 1 melnu kubiņu. Tātad 429 ķieģeļi satur nepāra skaitu melno kubiņu. Bet paralēlskaldnī ir pāra skaits melno kubiņu. Iegūta pretruna.