41. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1990./ 91. m.g.

UZDEVUMI

5. klase

91.1. Doti 1990 vienādi stienīši. Kādas figūras no tiem var salikt vairāk: trijstūrus vai kvadrātus? Par cik vairāk? Katra trijstūra (kvadrāta) malu veido viens stienītis.

91.2. Kvadrātiska režģa veidā novietoti 8×8 punkti; katrā vertikālē un horizontālē attālums starp blakus esošiem punktiem ir 1. Kādu lielāko daudzumu nogriežņu ar garumu 2 var novilkt tā, lai tie nekrustotos, nesaskartos un nepārklātos, un lai katrs no tiem saturētu tieši 3 no režģī izvietotajiem punktiem?

91.3. Izveidoti 2 četrciparu skaitļi; katrs no tiem pa reizei satur ciparus 1, 4, 6, 9. Vai viens no izveidotajiem skaitļiem var būt 7 reizes lielāks par otru?

91.4. Kastītē atrodas vairāki zīmuļi. Starp tiem var atrast zīmuļus, kuri atšķiras pēc garuma, un zīmuļus, kuri atšķiras pēc krāsas. Vai noteikti var atrast divus zīmuļus, kuri vienlaikus atšķiras gan pēc krāsas, gan pēc garuma?

91.5. Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 7 ir ar vienādu masu, bet vienas monētas masa ir citāda. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanu palīdzību atrast atšķirīgo monētu?

6. klase

91.6. Doti 10 skaitļi (starp tiem var būt arī vienādi). Apskatām to reizinājumus pa diviem skaitļiem. Vai var gadīties, ka tieši

a) 25,

b) 12,

c) 13

no šiem reizinājumiem ir negatīvi?

91.7. Apskatām 10 dažādus skaitļus un visas to starpības (no lielākā skaitļa atņem mazāko). Kāds ir mazākais dažādo starpību skaits, kāds var izveidoties?

91.8. Aplūkosim divciparu pirmskaitļus.

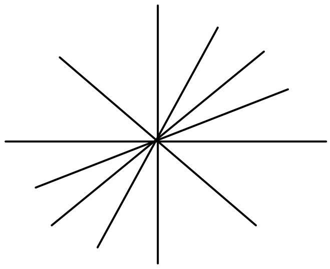
Vai tos visus var izrakstīt rindā tā, lai katrs nākošais pirmskaitlis sāktos ar tādu pašu ciparu, ar kādu beidzas iepriekšējais?

91.9. Attēlot koordinātu plaknē visus tos punktus (x, y), kas apmierina vienādību $|8-x|+|4-y|=3$.

91.10. Dotas 6 pēc ārējā izskata vienādas monētas. Četrām no tām masas savā starpā vienāda, bet divām – arī savā starpā vienādas, taču mazākas nekā pirmajām četrām. . Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanu palīdzību atrast abas vieglākās monētas?

7. klase

91.11. No 1. zīm. attēlotajām taisnēm divas ir koordinātu asis, bet pārējās – funkciju $y=2x,\ y=x,\ y=-x,\ y=\frac{1}{2}x$ grafiki (asu apzīmējumi un pozitīvie virzieni nodzēsti).



1. zīm.

Par kurām taisnēm var droši pateikt, kas tas ir?

91.12. Vienādojumam $ax=b$ nav neviena atrisinājuma (a un b – kaut kādi doti skaitļi, x – mainīgais). Cik atrisinājumu ir vienādojumam?

91.13. Rindā izrakstīti cipari 1234567890123...890 (ciparu grupa 1234567890 atkārtota 10 reizes). Iegūtajā ciparu virknē izsvītro visus ciparus, kas atrodas nepāra vietās. Ar palikušo virkni izdara to pašu, utt., kamēr paliek pāri viens cipars. Kāds tas ir?

91.14. Doti 6 stieņi, katrs 50 cm garš. Vai tos var sagriezt gabalos tā, lai rastos 12 gabali ar garumu 12 cm katrs, 30 gabali ar garumu 3 cm katrs un 11 gabali ar garumu 6 cm katrs?

91.15. Kastītē atrodas vairāki zīmuļi. Ir zināms, ka starp tiem var atrast zīmuļus, kuri atšķiras pēc krāsas, var atrast zīmuļus, kuri atšķiras pēc garuma un var atrast zīmuļus, kuri atšķiras pēc formas (apaļi vai šķautņaini).

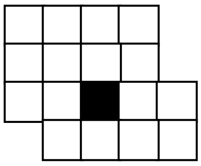
8. klase

91.16. Sadalīt reizinātājos izteiksmi $a^4 - b^4$.

91.17. Ar $[x]$ apzīmē skaitļa x veselo daļu.
Piemēram, $[4{,}1] = 4$, $[3] = 3$.
Cik ir tādu naturālu skaitļu n, ka $\left[\sqrt{n}\right] = 25$?

91.18. Vai trapeces diagonāļu krustpunkts var atrasties uz tās viduslīnijas?

91.19. Sagriezt 2. zīm. parādīto figūru divās vienādās daļās. Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām; tumšā rūtiņa ir caurums.



2. zīm.

91.20. Atrast

a) trīs,

b) četrus,

c) desmit

dažādus naturālus skaitļus, kuru summa dalās ar katru no šiem skaitļiem.
Katrā gadījumā pietiek uzrādīt vienu skaitļu komplektu.

9. klase

91.21. Taisnleņķa trijstūrī hipotenūzas garums ir 10 cm.
Atrast to mediānu garumu kvadrātu summu, kuras novilktas no šauro leņķu virsotnēm.

91.22. Atrisināt nevienādību

$$\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x+2}<0.$$

91.23. Pierādīt, ka aritmētiskajā progresijā

$$1990+1991\cdot n,\quad n=1, 2, 3,\ldots$$

var atrast bezgalīgi daudzus locekļus, kuru ciparu summas savā starpā ir vienādas.

91.24. Kādu lielāko dažādu komisiju skaitu var izveidot no 4 cilvēkiem tā, lai katrām divām komisijām būtu vismaz viens kopīgs loceklis?
Divas komisijas nesastāv no vieniem un tiem pašiem cilvēkiem

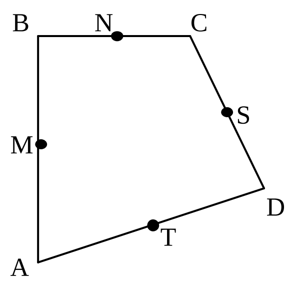
91.25. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Vienu rūtiņu izgriež..
Vai atlikušo daļu var sagriezt 63 vienādsānu trijstūros, kuru katetes ir rūtiņu diagonāles?

10. klase

91.26. Funkcijas $f(x)=a+b\sin x$ vērtību kopa ir intervāls $[4; 5]$.
Atrast *a* un *b*.

91.27. Kādu vislielāko kuba šķautņu skaitu to iekšējos punktos var šķelt viena plakne?

91.28. Izliekta četrstūra *ABCD* laukums ir *L*, bet malu viduspunkti ir *M*, *N*, *S*, *T* (skat. 3. zīm.).



3. zīm.

Atrast trijstūru *ANS*, *BST*, *CTM* un *DMN* laukumu summu.

91.29. Zināms, ka divu pozitīvu skaitļu reizinājums lielāks par to summu. Pierādīt, ka šo skaitļu summa lielāka par 4.

91.30. Dots, ka *a* un *b* – naturāli skaitļi un a^2+b^2 dalās ar 7.
Pierādīt, ka a^2+b^2 dalās ar 49.

11. klase

91.31. Funkcijas $f(x)$ atvasinājuma atvasinājumu apzīmēsim ar f''.
Dotas funkcijas $h(x)$ un $g(x)$. Pierādīt, ka

$$(h \cdot g)'' = h'' \cdot g + 2h' \cdot g' + h \cdot g''.$$

91.32. Kāds lielākais pirmskaitļu daudzums var būt sastopams starp 12 pēc kārtas ņemtiem naturāliem skaitļiem?

91.33. Atrisināt vienādojumu

$$|\sin x| + |\sin \sqrt{2}x| = 0.$$

91.34. Trīs savstarpēji perpendikulāras plaknes krustojas punktā *O* un sadala telpu 8 daļās. Vienā no tām ņemti punkti *A* un *B*. Pierādīt, ka leņķis starp vektoriem $\overrightarrow{OA}$ un $\overrightarrow{OB}$ ir šaurs.

91.35. Stacijā pie vienas sienas karājas divi pilnīgi vienādi absolūti precīzi pulksteņi. . Viens no tiem rāda Latvijas laiku, otrs – Maskavas laiku (laiki ir atšķirīgi). Īsākais attālums starp stundu rādītāju galapunktiem ir *m*, garākais – *M*. Atrast attālumu starp ciparnīcu centriem.

12. klase

91.36. Dots, ka $x + y = 1$. Pierādīt, ka $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$.

91.37. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Vai var visas rūtiņas pārsvītrot ar četrām taisnēm?
(Saka. ka taisne pārsvītro rūtiņu, ja tā iet caur šīs rūtiņas iekšēju punktu)

91.38. Zināms, ka $F(x)$ un $G(x)$ ir funkcijas un ka

$$F'(x) = x\sin x + \cos 3x \quad \text{un} \quad G'(x) = x\sin x + \cos 3x.$$

Zināms arī, ka $F(3) = 2$ un $G(3) = 5$.
Aprēķināt $F(5) - G(5)$.

91.39. Trijplakņu kakta visas šķautnes pa pāriem perpendikularas; tā skaldņu iekšpuses ir spoguļi. Uz šo kaktu krīt gaismas stars un pa reizei atstarojas no katras tā skaldnes.
Pierādīt, ka trīskārt atstarotā stara virziens ir pretējs sākotnējā stara virzienam.

(Atstarošanās no plaknes notiek pēc likuma: krītošais un atstarojošais stars ir vienā plaknē ar perpendikulu pret spoguļa plakni atstarošanas punktā un veido ar šo perpendikulu vienādus leņķus.)

91.40. Izvēlamies vienības kubam trīs skaldnes, kurām ir kopīga virsotne, un pa šīm skaldnēm pielīmējam tam trīs tādus pašus vienības kubus (salīmētās skaldnes pilnībā sakrīt). Iegūto figūru sauksim par ķieģeli.

Vai var salikt taisnstūra paralēlskaldni ar izmēriem $11\times12\times13$ no 429 šādiem ķieģeļiem?