42. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1991./ 92. m.g.

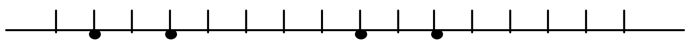
UZDEVUMI

5. klase

92.1. Vai var uzzīmēt 6 nogriežņus tā, lai katrs no tiem krustotu tieši četrus citus?

92.2. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds skaitlis. Kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 32, 34, 35. Divās rindās ierakstīto skaitļu summas ir 42 un 27. Kāda ir trešajā rindā ierakstīto skaitļu summa?

92.3. Uz skaitļu ass attēloti vairāki veseli skaitļi, kas ņemti pēc kārtas (skat. 1. zīm.):

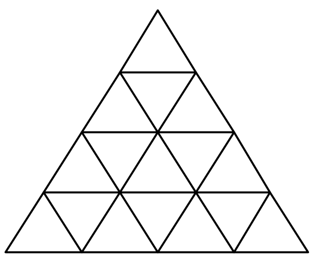


1. zīm.

Divi no tiem skaitļiem, kas attēloti ar melniem aplīšiem, dalās ar 3, bet divi – ar 5 (nav zināms, kuri). Norādiet zīmējumā skaitli, kurš dalās ar 15.

92.4. Sešas monētas sver pa 5 g katra, bet divas – pa 6 g katra. Doti svari ar vienu svaru kausu un skalu, kuras iedaļas vērtība ir 1 g. Kā ar 5 svēršanu palīdzību atrast katras monētas masu?

92.5. Katrā no mazajiem trijstūrīšiem ierakstīts vesels skaitlis no 1 līdz 16, turklāt dažādos trijstūrīšos – dažādi skaitļi (skat. 2. zīm.).



2. zīm.

Pierādīt, ka var atrast divus tādus trijstūrīšus, kuros ierakstītie skaitļi atšķiras vismaz par 3 un kam ir kopīga mala.

6. klase

92.6. Četrus veselus pozitīvus skaitļus katru dalīja ar 5 ar atlikumu. Iegūto atlikumu summa ir 3. Pierādīt, ka šo četru skaitļu reizinājums dalās ar 5.

92.7. Vai var uzzīmēt 8 nogriežņus tā, lai katrs no tiem krustotos ar dažādu skaitu citu nogriežņu?

92.8. Reizināšanas pierakstā viens cipars aizstāts ar zvaigznīti.

$$1*74633 \times 2840332 = 3904414098156.$$

Kas tas par ciparu?

92.9. Vai piecstūra malas un diagonāles var tā sanumurēt ar skaitļiem no 1 līdz 10 tā, lai katram trijstūrim, kura visas virsotnes ir piecstūra virsotnēs, malu numuru summa būtu viena un tā pati?

92.10. Klases šaha turnīrā piedalās 10 dalībnieki; katrs spēlē ar katru vienu reizi. Par uzvaru piešķir 1 punktu, par neizšķirtu ½ punktus, par zaudējumu 0 punktus. Nolemts, ka klases lielmeistara nosaukumu piešķirs tiem, kas izcīnīs vismaz 7 punktus. Kāds lielākais skolēnu skaits šajā turnīrā var iegūt lielmeistara nosaukumu ?

7. klase

92.11. Vienādojumu $ax = b$, $bx = c$, $cx = a$ saknes ir vienādi pozitīvi skaitļi. Atrast sakņu skaitliskās vērtības.

92.12. Zināms, ka $ad = bc, cf = ed, eh = gf$.
Pierādīt, ka $ah = gb$ (burti apzīmē pozitīvus skaitļus).

92.13. Dots, ka a un b ir naturāli skaitļi un $a + b = 210$.
Pierādīt, ka ab nedalās ar 210.

92.14. Plaknē uzzīmētas 7 taisnes. Nekādas divas no tām nav paralēlas savā starpā un nekādas trīs neiet caur vienu punktu.
Vai var gadīties, ka starp apgabaliem, kuros šīs taisnes sadala plakni ir 9 trijstūri un 7 četrstūri?

(Apskatām tikai tos apgabalus, kuri ar novilktajām taisnēm nesadalās sīkākos apgabalos)

92.15. Pa apli izrakstīti 10 skaitļi; daži no tiem ir pozitīvi, pārējie – negatīvi. Ar vienu gājienu var mainīt zīmi uz pretējo jebkuriem trim pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem. Pierādīt, ka ar vairākiem gājieniem noteikti var panākt, lai visi skaitļi vienlaicīgi būtu pozitīvi.

8. klase

92.16. Atrast kaut vienu tādu daļu $\frac{m}{n}$, ka visas daļas

$$\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n+1}, \frac{m+2}{n+2}, \ldots, \frac{m+5}{n+5}$$

vienlaicīgi ir saīsināmas; turklāt $m \neq n$.

92.17. Uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 1. Ar vienu gājienu atļauts uz tāfeles uzrakstīto skaitli nodzēst un uzrakstīt vietā vai nu nodzēstā skaitļa kvadrātu vai divkāršotu nodzēsto skaitli.

Kā ar 10 gājieniem iegūt uz tāfeles 2^{89} ?

92.18. Daudzstūris ar diagonālēm sadalīts trijstūros; diagonāles savā starpā nekrustojas. Daļa trijstūru nokrāsoti baltā, pārējie – melnā krāsā tā, ka nekādiem diviem vienādi nokrāsotiem trijstūriem nav kopīgas malas.

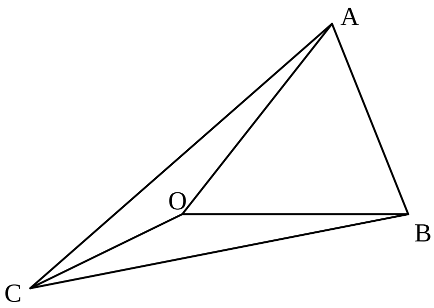
Vai var gadīties, ka balto trijstūru skaits vairāk nekā trīs reizes pārsniedz melno trijstūru skaitu?

Bet vai tas var tieši trīs reizes pārsniegt melno trijstūru skaitu?

92.19. Pierādīt, ka

$$\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}=3.$$

92.20. Trijstūra *ABC* iekšpusē atrodas punkts *O* (skat. 3. zīm.).



3. zīm.

Pierādīt, ka $AO + BO + CO < AB + AC + BC$.

9. klase

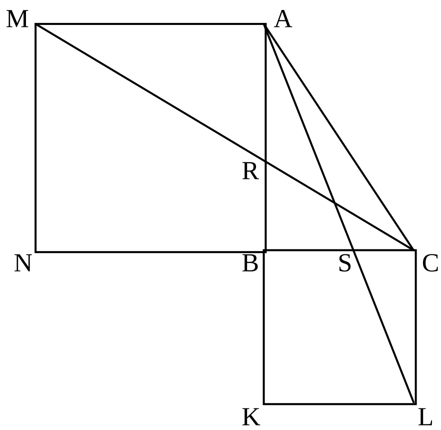
92.21. Dots, ka skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ veido aritmētisku progresiju un ka $f(x) = Ax + B$. Vai taisnība, ka skaitļi $f(a_1),\ f(a_2), \ldots, f(a_n)$ arī veido aritmētisku progresiju?

92.22. Uzzīmēt 13-stūri, kuru var sagriezt 5 paralelogramos.

92.23. Vienādojumam $x^2 - ax + x = 0$ ir divas saknes x_1 un x_2 .

Pierādīt, ka $x_1^2 + x_2^2 \geq 2(x_1 + x_2)$.

92.24. *ABC* ir taisnleņķa trijstūris, $\angle B = 90°$; *AMNB* un *BKLC* ir kvadrāti, kas nepārklājas ar trijstūri *ABC*. *MC* un *AB* krustojas punktā *R*, bet *AL* un *BC* – punktā *S* (skat. 4. zīm.).



4. zīm.

Pierādīt, ka $RB = SB$.

92.25. Pierādīt, ka vienādojumam

$$x^5 + y^3 = z^2$$

ir bezgalīgi daudz atrisinājumu naturālos skaitļos.

10. klase

92.26. Dots, ka $|a+b|=|b+c|=|a+c|$. Vai noteikti $a=b=c$?

Pamatojiet savu atbildi.

92.27. Vai četrciparu skaitlis, kura pirmais cipars vienāds ar pēdējo, bet otrais ar trešo var būt pirmskaitlis?

92.28. Pierādīt, ka

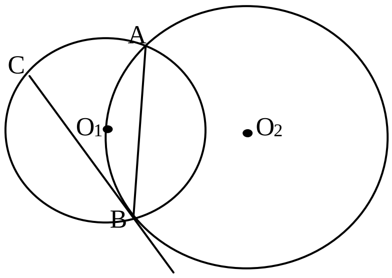
$$\frac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cdots+\cfrac{1}{1991}}}}+\frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cdots+\cfrac{1}{1991}}}}}=1.$$

92.29. Atrast izteiksmes

$$S=\sqrt{9+x^2}+\sqrt{(44-x)^2+900}$$

mazāko iespējamo vērtību.

92.30. Caur riņķa līnijas ω_1 centru novilkta riņķa līnija ω_2 (skat. 5. zīm.).



5. zīm.

Abas riņķa līnijas krustojas punktos A un B. Punktā B riņķa līnijai ω_2 novilkta pieskare, kas krusto ω_1 punktā C. Pierādīt, ka $AB=CB$.

11. klase

92.31. Skaitli 1991 dalot ar a, atlikumā iegūst 9. Kāds var būt a ?

92.32. Zināms, ka $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; skaitļi a, b, c, d visi ir dažādi. Pierādīt, ka vienādojumam

$$P'(x) = 0$$

ir vismaz 3 dažādas saknes.

92.33. Par zebru sauksim figūru, kas ar vienu gājienu var pārvietoties par 2 vai par 3 rūtiņām horizontālā vai vertikālā virzienā. Vai zebra var apstaigāt visas rūtiņas kvadrātā 4×4, katrā rūtiņā nonākot tieši vienu reizi un ar pēdējo gājienu atgriežoties sākotnējā rūtiņā?

92.34. Viena trijstūra piramīda atrodas otras iekšpusē. Vai pirmās piramīdas šķautņu garumu summa noteikti ir mazāka par otrās piramīdas šķautņu garumu summu ?

92.35. Šaurleņķa trijstūra malu garumi ir a, b un c, turklāt $a < b < c$; ievilktās un apvilktās riņķa līniju rādiusi ir r un R. Pierādīt, ka

$$r + R < b.$$

12. klase

92.36. Dots, ka $\sin 4x < 4 \sin x$. Pierādīt, ka $\sin x > 0$.

92.37. Divas riņķa līnijas ar centriem A un B katra pieskaras abām leņķa malām un savā starpā pieskaras ārēji. Pierādīt, ka riņķa līnija ar diametru AB arī pieskaras abām leņķa malām.

92.38. Cik ir dažādu trijstūra piramīdu ar šķautņu garumiem 2, 3, 3, 4, 5, 5 ?

92.39. Par skaitļu virkni (a_n), n = 0, 1, 2, ... zināms, ka $a_0 = 9$ un katram $n \geq 0$ pastāv vienādība

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n.$$

Pierādīt, ka a_{10} savā pierakstā satur vismaz 1000 devītniekus.

92.40. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 3.$$