44. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1993./ 94. m.g.

UZDEVUMI

5. klase

94.1. No divām vienādām figūrām nogrieza pa vienādam gabalam. Vai var gadīties, ka pārpalikumi nav vienādi?

94.2. Vai desmit pēc kārtas ņemtu naturālu skaitļu summa var būt

a) 1000;

b) 111111;

c) 1045?

94.3. Atrodiet tādus 4 skaitļus, ka to starpības pa divi (no lielākā skaitļa atņemot mazāko) ir 2, 3, 4, 5, 6, 9.

Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

94.4. Vai vari pa apli uzrakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 1000 (katru vienu reizi) tādā kārtībā, ka starp katriem pieciem pēc kārtas uzrakstītiem skaitļiem vismaz divi dalās ar 3?

94.5. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Rūtiņās ierakstīti skaitļi (sk. 1. zīm.). Ar vienu gājienu drīkst pieskaitīt pa vieniniekam divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala.

Vai var panākt, lai visās rūtiņās skaitļi kļūtu vienādi?

0	0	1	0
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

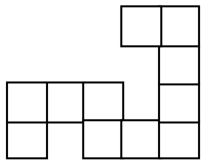
1. zīm.

6. klase

94.6. Katram naturālam skaitlim no 1 līdz 1000 aprēķināja tā ciparu reizinājumu. Cik reizes ieguva nulli?

94.7. Taisnstūris sastāv no vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no tām ierakstīts skaitlis (ne noteikti vesels). Vai var gadīties, ka katrā kolonnā skaitļu reizinājums ir 3, bet katrā rindiņā – 7?

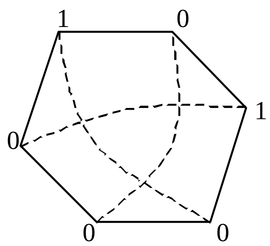
94.8. Kubam augšējā un apakšējā skaldne nokrāsotas ar nežūstošu melnu krāsu. Sākumā kubs atrodas uz melnās rūtiņas (sk. 2. zīm.). To ripina pa zīmējumā parādīto ceļu. Kuras rūtiņas vēl nokrāsosies melnas?



2.zīm.

94.9. Ap apaļu galdu sēž 1993 rūķīši no 4 ciltīm: voti, šilli, pukki un elfi. Ir zināms, ka voti nesēž blakus ar šilliem un pukki – ar elfiem. Pierādi, ka vienas cilts pārstāvji kaut kur sēž blakus.

94.10. Sešstūra virsotnēs ierakstīti skaitļi, kā parādīts 3.zīm. Ar vienu gājienu var pieskaitīt pa vieniniekam vai nu abiem vienas (jebkuras) malas galapunktiem, vai divām pretējām virsotnēm (tās savienotas ar pārtrauktām līnijām).
Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?



3. zīm.

7. klase

94.11. Plaknē novilktas 5 taisnes un 1 riņķa līnija. Vai var gadīties, ka tās sadala plakni tieši 23 daļās?

94.12. Kuri no sekojošiem skaitļiem ir pirmskaitļi?
Pamato savu atbildi:

a) 1395;

b) 131313;

c) 1993;

d) 1991.

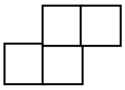
94.13. Dots, ka a, b, c, d ir naturāli skaitļi,

$$a+b=c+d=10,$$

$$ac+bd=99.$$

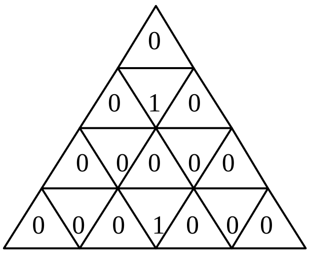
Vai tā var būt?

94.14. Plakne sadalīta kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Vai var katrā rūtiņā ierakstīt tieši vienu no skaitļiem 1, 2, 4, lai katrā tādā figūrā, kāda redzama 4. zīm. (tā var būt pagriezta arī citādi), ierakstīto skaitļu summa būtu 8?



4. zīm.

94.15. Ar vienu gājienu atļauts diviem trijstūrīšiem, kam 5. zīm. ir kopīga mala, pieskaitīt pa vieniniekam. Vai, daudzkārt atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visos trijstūrīšos būtu ierakstīti vienādi skaitļi?



5. zīm.

8. klase

94.16. Dots, ka $\frac{x}{y}=\frac{9y}{x}$. Kāda var būt $\frac{x}{y}$ vērtība?

94.17. Uzzīmējiet kaut vienu deviņstūri, kam 6 virsotnes atrodas uz vienas taisnes.

94.18. Desmitstūrim ir 4 šauri leņķi. Vai var būt, ka visi tā leņķi mazāki par $180°$?

94.19. Kvadrāts sastāv no 9×9 rūtiņām; katrā rūtiņā ierakstīts skaitlis 1. Ar vienu gājienu var izvēlēties patvaļīgu 4×4 rūtiņu kvadrātu un visiem skaitļiem tajā pieskaitīt pa skaitlim 1.

Pierādiet, ka pēc 96 gājieniem varēs atrast tādu 5×5 rūtiņu kvadrātu, kura četrās stūra rūtiņās ierakstīto skaitļu summa būs tieši 100.

94.20. Pilsētas ielu tīkls veido kvadrātveida režģi, kas sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā no 81 rūtiņu stūriem ir autobusu pietura; citu pieturu nav.

Kādu vismazāko skaitu autobusa maršrutu jāievieš, lai no katras pieturas varētu aizbraukt uz katru citu, izdarot ne vairāk kā vienu pārsēšanos?

Pa katru maršrutu autobuss kursē abos virzienos; Katrs maršruts drīkst saturēt augstākais vienu pagriezienu.

9. klase

94.21. Vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir tieši divas dažādas saknes. Cik sakņu var būt vienādojumam $cx^2+bx+a=0$?

94.22. Vai $(n-1)!$ dalās ar n, ja

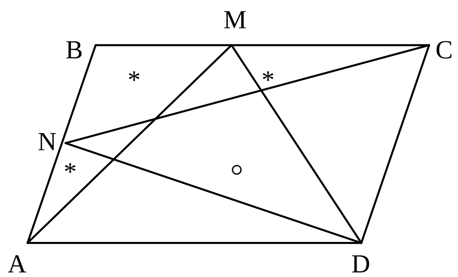
a) $n=16$,

b) $n=41$,

c) $n=1991$,

d) $n=1993$?

94.23. Paralelogramā *ABCD* ievilkti trijstūri *AMD* un *CND* (skat. 6. zīm.).



6. zīm.

Pierādiet, ka ar * apzīmēto laukumu summa vienāda ar tā apgabala laukumu, kas apzīmēts ar °.

94. 24. Aprēķināt izteiksmes vērtību, izsakot to kā decimaldaļskaitli:

$$\frac{1}{2^{-1993}+1}+\frac{1}{2^{-1992}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{0}+1}+\frac{1}{2^{1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{1993}+1}.$$

94.25. Desmit futbolkomandas katra ar katru spēlēja vienu reizi. Par uzvaru komanda saņem 2 punktus, par neizšķirtu – 1 punktu, par zaudējumu – 0 punktus. "Daugava" ieguva vairāk punktu nekā jebkura cita komanda.

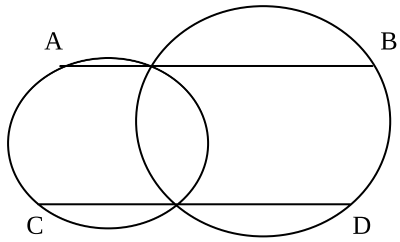
Kāds lielākais zaudējumu skaits varēja būt "Daugavai"?

10. klase

94.26. Vai skaitlis $2^{123}+1$ ir pirmskaitlis?

94.27. Sekantes *AB* un *CD* ir paralēlas un iet caur divu riņķa līniju krustpunktiem (skat. 7. zīm.).

Pierādīt, ka *ABCD* ir paralelograms.



7. zīm.

94.28. Dots, ka $ax=by=cz=10$; visi 6 skaitļi a, ... , z ir pozitīvi.

Pieradiet, ka

$$(a+b+c)(x+y+z)\geq 90.$$

94.29. Uzzīmējiet plaknē 8 punktus tā, lai nekādi trīs no tiem neatrastos uz vienas taisnes un nekādi pieci nebūtu izliekta piecstūra virsotnes.

Pietiek ar vienu piemēru.

94.30. Klasē ir n $(n\geq 2)$ skolēnu; daži no tiem draudzējas. Ja divi skolēni nedraudzējas savā starpā, tad var atrast trešo, kas draudzējas ar tiem abiem.

Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits?

(Uzskatām, ka katrs draugu pāris veido vienu draudzību, pārus *AB* un *BA* uzskatām par vienu un to pašu pāri.)

11. klase

94.31. Izliektā četrstūrī *ABCD* zināms, ka $\angle ABD = \angle ACD$.

Pierādiet, ka $\angle BCA = \angle BDA$.

94.32. Dots, ka *n* – naturāls skaitlis un $n-3$ dalās ar 5.

Kuri no sekojošiem skaitļiem dalās ar 5:

a) $n-198$,

b) n^2-1,

c) n^2+1 ?

94.33. Pierādiet, ka katram naturālam *n* pastāv nevienādība

$$n^n \geq 2^{n-1} \cdot n!$$

94.34. Izliektā piecstūrī katra no četrām diagonālēm paralēla savai piecstūra malai. Pierādiet, ka arī piektā diagonāle paralēla kādai malai.

94.35. Klasē ir n $(n \geq 4)$ skolēnu; daži no tiem draudzējas. Ja divi skolēni nedraudzējas savā starpā, tad klasē var atrast vismaz 2 citus skolēnus kas draudzējas ar tiem abiem.

Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits?

(Uzskatām, ka katrs draugu pāris veido vienu draudzību, pārus *AB* un *BA* uzskatām par vienu un to pašu pāri.)

12. klase

94.36. Dots, ka $\sin x = \sin y$ un $\sin 2x = \sin 2y$. Pierādīt, ka

$$\sin 1993x = \sin 1993y.$$

94.37. Atrodiet visu tādu četrciparu skaitļu summu, kam pirmais cipars vienāds ar pēdējo, bet otrais – ar trešo.

94.38. Trijstūra iekšpusē ņemts punkts. Pierādīt, ka tā attālumu summa līdz malām nav mazāka par trijstūra mazāko augstumu un nav lielāka par trijstūra lielāko augstumu.

94.39. Vai eksistē izliekts daudzskaldnis ar divdesmit piecām skaldnēm, kas visas ir četrstūri?

94.40. Klasē ir n $(n \geq 4)$ skolēnu; daži no tiem draudzējas. Katriem diviem skolēniem var atrast trešo, kas draudzējas ar tiem abiem.

Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits?

(Uzskatām, ka katrs draugu pāris veido vienu draudzību, pārus *AB* un *BA* uzskatām par vienu un to pašu pāri.).