45. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1994./95. m.g.

ATRISINĀAJUMI

95.1. Šis reizinājums dalās ar 10; tātad tā pēdējais cipars ir 0.

95.2. Nē, nevar. Aplūkosim pirmos 5 skaitļus: 5, *a*, *b*, *c*, *d*. Tad

$$5 + a + b + c = a + b + c + d = 15 \quad \Rightarrow \quad d = 5 .$$

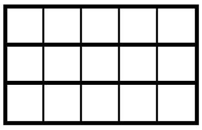
Līdzīgi pierāda, ka visiem pasvītrotajiem skaitļiem ir jābūt vienādiem ar 5; taču pēdējais pasvītrotais skaitlis nav 5; pretruna.

$$5 * * * \underline{*} * * * \underline{*} * * * \underline{6}$$

7. zim.

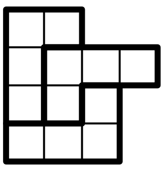
95.3. a) Nē, nevar; rūtiņu skaits nedalās ar 3.

b) Var. Skat. 8. zīm.



8. zīm.

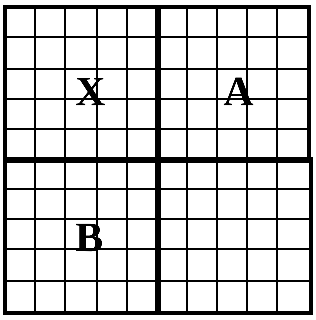
c) Var. Skat. 9. zīm.



9. zīm.

95.4. Jā, var. Vispirms izpildām gājienus ar skaitļu pāriem (1, 3), (5, 7), ..., (17, 19). Iegūstam skaitļus 2, 2, 4, 4, 6, 6, ..., 20, 20. Tālāk katru vienādo skaitļu pāri ar vairākiem gājieniem papildinām līdz skaitlim 20.

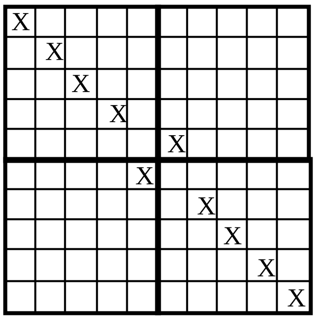
95.5. Skat 10. zīm.



10. zīm.

Ja daļā A ir n krustiņi, tad daļā X ir $5-n$ krustiņu (jo 5 augšējās horizontālēs to kopā ir 5). Aplūkojot vertikāles, konstatējam, ka daļā B ir $5-(5-n)=n$ krustiņi.

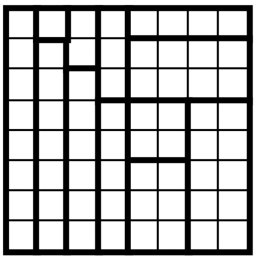
Var būt, ka $n=1$, skat. 11. zīm.



11. zīm.

95.6. Vienīgā iespēja ir šāda: $123{,}45+678{,}90$. Ar nelielu pārlasi var pārliecināties, ka citu atrisinajumu nav.

95.7. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 12. zīmējumā.



12. zīm.

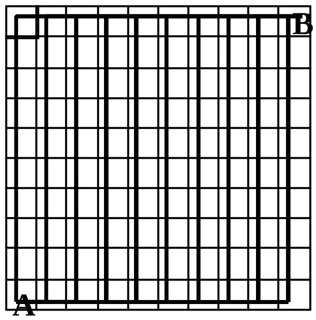
95.8. Divciparu skaitļi, kas dalās ar 19 ir 19, 38, 57, 76, 95;

Divciparu skaitļi, kas dalās ar 21 ir 21, 42, 63, 84.

Tāpēc virkne ir viennozīmīgi noteikta ar periodu (7, 6, 3, 8, 4, 2, 1, 9, 5). Tā kā $1994 = 221 \cdot 9 + 5$, tad meklējamais cipars ir 4.

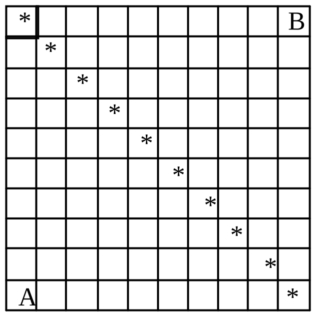
95.9. Nē, nevar. Šāda gājiena rezultātā visu skaitļu summa pieaug par 2. Sākumā šī summa ir vienāda ar 55 (nepāra skaitlis). Ja visi skaitļi kļūs vienādi, tad šo skaitļu summa 6*x* būs pāra skaitlis; bet tas nav iespējams.

95.10. 13. zīm. redzams, ka 10 rūķīši var savākt visus dārgakmeņus.



13. zīm.

Mazāk rūķīšu būt nevar, jo caur katru no 10 rūtiņām, kas atrodas uz otras diagonāles (skat. 14. zīm.) jāiet citam rūķītim.

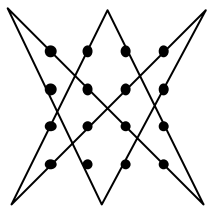


14. zīm.

95.11. Var izvēlēties, piemēram, šādus skaitļus –1, -2, -3, -4, 20, 21, 21, 23. Lai summā iegūtu negatīvu skaitli jāizvēlas divi no četriem negatīviem skaitļiem. Tādu pāru skaits ir 6.

95.12. Nē, nevar būt. Divu skaitļu mazākais kopīgais dalāmais dalās ar katru no dotajiem skaitļiem, tātad dalās arī ar to lielāko kopīgo dalāmo; bet 1200 nedalās ar 32.

95.13. Skat., piemēram, 15. zīm.



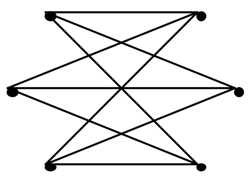
15. zīm.

95.14. Nē, nevar. Ievērojam, ka $1+2+\cdots+16=136$; tāpēc visu rindiņu un visu kolonnu summa būtu $136\cdot 2=272$. Bet 8 pēc kārtas ejošu naturālu skaitļu summa nevar būt vienāda ar 272, jo $30+31+\cdots+37<272$, bet $31+32+\cdots+38>272$.

95.15. Aplūkosim rūtiņu lapā kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas. To var sadalīt 4 kvadrātos ar izmēriem 3×3 rūtiņas; katrā no tiem ir vismaz 7 melnas rūtiņas, tātad lielajā kvadrātā ir vismaz 28 melnas rūtiņas.

Kvadrātu ar izmēriem 6×6 rūtiņas sadalīsim 9 kvadrātos ar izmēriem 2×2 rūtiņas. Ja nevienā no tiem nebūtu nokrāsotas visas 4 rūtiņas, tad melno rūtiņu skaits lielajā kvadrātā nepārsniegtu $9\cdot 3=27$; pretruna. Tātad vismaz vienam no šiem kvadrātiem ar izmēriem 2×2 visas rūtiņas ir melnas.

95.16. Jā, var. Skat., piemēram, 16. zīm.



16. zīm.

95.17. Apzīmēsim skaitļa n ciparu summu ar $S(n)$. Ja skaitlis n satur vairāk nekā 1 ciparu, tad $S(n)<n$. Tiešām

$$n=\overline{a_k\ldots a_1a_0}=a_k\cdot 10^k+\cdots+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0>a_k+\cdots+a_1+a_0 .$$

Tātad, ja x satur vairāk nekā 1 ciparu, tad $x=S(y)\leq y=S(x)<x$. Tātad x ir viencipara skaitlis. Protams, ka tādā gadījumā $y=S(x)=x$.

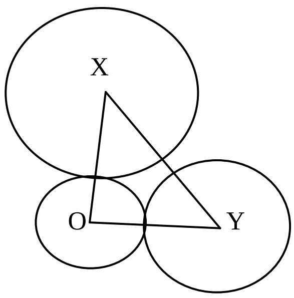
95.18. Šo skaitli var sadalīt reizinātājos, kas ir lielāki par 1:

$$3^{100}+4=\left(3^{25}\right)^4+4\cdot\left(3^{25}\right)^2+4-4\cdot\left(3^{25}\right)^2=$$
$$\left(3^{50}+2\right)^2-\left(2\cdot 3^{25}\right)^2=$$
$$\left(3^{50}-2\cdot 3^{25}+2\right)\cdot\left(3^{50}+2\cdot 3^{25}+2\right).$$

95.19. Var izrakstīt 66 negatīvus skaitļus 33 reizes pēc kārtas rakstot skaitļu grupu $(-1,-1,10)$.

Pierādīsim, ka nevar uzrakstīt vairāk par 66 negatīviem skaitļiem. Sadalīsim visus 99 skaitļus 33 grupās pa trim pēc kārtas ņemtiem skaitļiem. Pieņemsim, ka ir ne mazāk par 67 negatīviem skaitļiem. Tā kā $67>2\cdot 33$, tad kādā no šīm grupām ir 3 negatīvi skaitļi; tad šo trīs skaitļu summa ir negatīva, bet tas ir pretrunā ar uzdevuma nosacījumiem.

95.20. Apskatīsim riņķa līniju ar mazāko rādiusu no visām uzzīmētajām (skat. 17. zīm.)



17. zīm.

Tad $XY\geq OX$ un $XY\geq OY$; tātad XY ir trijstūra OXY garākā mala, un $\angle XOY$ ir trijstūra OXY lielākais leņķis. Tātad $\angle XOY\geq 60°$; tāpēc šādu leņķu ap punktu O nevar būt vairāk par sešiem.

95.21. Pārveidojot doto izteiksmi, iegūstam:

$$a^3+b^3+3ab=(a+b)\cdot\left(a^2-ab+b^2\right)+3ab=$$
$$a^2-ab+b^2+3ab=a^2+2ab+b^2=(a+b)^2=1.$$

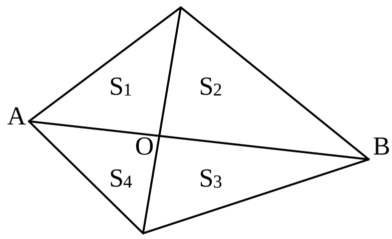
95.22. Mazākais pieskaršanās punktu skaits vienai riņķa līnijai ir 0, lielākais – 9. Tātad pavisam iespējamas 10 pieskaršanās punktu skaita vērtības 0, 1, 2, ... , 9. Taču visas šīs vērtības reizē realizēties nevar, jo, ja kāda riņķa līnija nepieskaras nevienai citai (pieskaršanās punktu skaits ir 0), tad nav riņķa līnijas, kas pieskaras visām pārējām (pieskaršanās punktu skaits ir 9).

No Dirihlē principa seko, ka starp šīm 10 riņķa līnijām var atrast divas, kas pieskaras vienādam skaitam pārējo.

95.23. Nē, neeksistē. Ja $a < b < c < d$, tad $b \geq 2$, $c \geq 3$; tāpēc

$$a + b + c + d < 4d < 6d \leq abcd.$$

95.24. Skat. 18. zīm.



18. zīm.

No vienādībām $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$ un $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$ seko, ka

$$S_1 = S_3 \quad \text{un} \quad S_2 = S_4 \ .$$

Trijstūriem ar vienādiem augstumiem laukumi attiecas kā pamati; tāpēc

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OB} = \frac{S_4}{S_3};$$

No šejienes

$$S_1^2 = S_1 S_3 = S_2 S_4 = S_2^{\,2} \quad \Rightarrow \quad S_1 = S_2 \quad \Rightarrow \quad AO = OB.$$

Līdzīgi pierāda, ka arī otra diagonāle dalās krustpunktā O uz pusēm. Tātad aplūkojamais četrstūris ir paralelograms.

95.25. Pareizināsim pirmo saskaitāmo ar $(2-1)$ un atkārtoti pielietosim formulu $(x-y)\cdot(x+y) = x^2 - y^2$.

Iegūsim

$$(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)+1 =$$
$$(2-1)\cdot(2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)+1 =$$
$$(2^2-1)\cdot(2^2+1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)+1 =$$
$$(2^4-1)\cdot(2^4+1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)+1 =$$
$$(2^8-1)\cdot(2^8+1)\cdot(2^{16}+1)+1 =$$
$$(2^{16}-1)\cdot(2^{16}+1)+1 =$$
$$2^{32}-1+1 = 2^{32}.$$

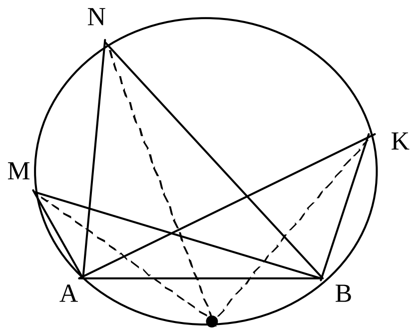
95.26. Nē, ne noteikti. Šiem vienādojumiem eksistē atrisinājums, ja to diskriminanti ir nenegatīvi, t.i.

$$a^2 - b^2 \geq 0 \quad \text{un} \quad b^2 - a^2 \geq 0 \ .$$

Ņemot $a = 1$ un $b = -1$, abiem vienādojumiem ir atrisinājumi.

95.27. Ja $n \geq 2$, tad skaitlis $2^n + 2 = 2 \cdot \left(2^{n-1} + 1\right)$ dalās ar 2, bet nedalās ar 4; tātad nevar būt naturāla skaitļa kvadrāts.
Vērtība $n = 1$ der, jo $2^1 + 2 = 2^2$.

95.28. Skat. 19. zīm.



19. zīm.

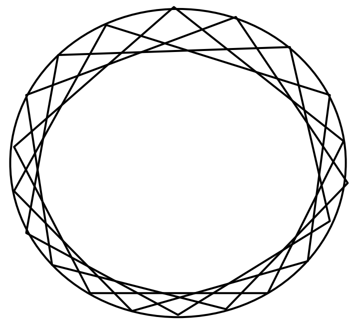
No teorēmas par ievilktajiem leņķiem seko, ka visi punkti *A*, *M*, *N*, *K*, *B* atrodas uz vienas riņķa līnijas; un leņķu $\angle AMB$, $\angle ANB$, $\angle AKB$ bisektrises iet caur loka *AB* viduspunktu; tātad krustojas vienā punktā.

95.29. Izpildot pārveidojumus, iegūstam:

$$\left(a^4 + b^4 + c^4\right) - \left(a^3 + b^3 + c^3\right) =$$
$$\left(a^4 + b^4 + c^4\right) - \left(a^3 + b^3 + c^3\right) + \left(a^2 + b^2 + c^2\right) - \left(a + b + c\right) =$$
$$a \cdot (a+1) \cdot (a-1)^2 + b \cdot (b+1) \cdot (b-1)^2 + c \cdot (c+1) \cdot (c-1)^2 \geq 0.$$

Tātad kubu summa ir mazāka.

95.30. Visas 20 stūra virsotnes sadalām 4 regulāru piecstūru virsotņu komplektos; skat. 20. zīm.



20. zīm.

Tā kā $9 > 4 \cdot 2$, tad vismaz vienam 5-stūrim 3 virsotnes nokrāsotas baltas. Atliek ievērot, ka regulāra piecstūra jebkuras 3 virsotnes veido vienādsānu trijstūri.

95.31. Vienādojumam nav atrisinājumu., jo

$$|x-1|+|x-3|+|x-5| \ge |x-1|+|x-5| \ge$$
$$|(x-1)-(x-5)| = 4.$$

95.32. No dotā seko, ka viens skaitlis (teiksim *a*) dalās ar 3, bet pārējie skaitļi ar 3 nedalās. Tā kā $b, c \in \{1, 2\} \pmod 3$, tad

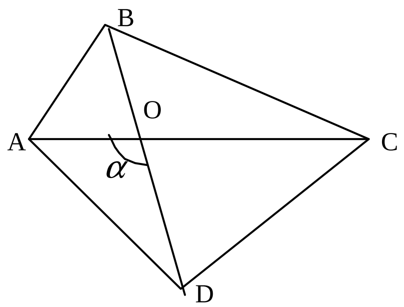
$$a^2+b^2+c^2 \equiv 0+1+1 \equiv 2 \pmod 3.$$

Tātad $a^2+b^2+c^2$ nedalās ar 3.

95.33. Ievērojam, ka

$$a^2+b^2+2-a-b-ab=$$
$$\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}(b-1)^2>0.$$

95.34. Pieņemsim, ka $\alpha \ge 90°$ (skat. 21. zīm.)



21. zīm.

Tad

$$AD^2+BC^2 \ge AO^2+OD^2+BO^2+OC^2 =$$
$$AO^2+OD^2+(20-OD)^2+(20-AO)^2 =$$
$$2\cdot AO^2-40\cdot AO+2\cdot OD^2-40\cdot OD+800=$$
$$2\cdot(AO-10)^2+2\cdot(OD-10)^2+400 \ge 400.$$

Tāpēc vai nu $AD^2 \ge 200$, vai $BC^2 \ge 200$, no kurienes seko prasītais.

95.35. Taisnes, kas savieno regulāra 13-stūra virsotnes, var iet 13 dažādos virzienos. Sešus melnos punktus savieno $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ nogriežņi. Tātad vismaz divi no tiem *AB* un *DC* ir paralēli. Tā kā 13 ir nepāra skaitlis, tad *ABCD* nav paralelograms (nav taisnstūris), un ir trapece ar visām melnām virsotnēm.

95.36. Nē, nevar būt. Pieņemsim, ka $a > 1$ (otrs gadījums ir analoģisks). Tad

$$\log_a b < 0 \quad \Rightarrow \quad b < 1,$$

Tātad

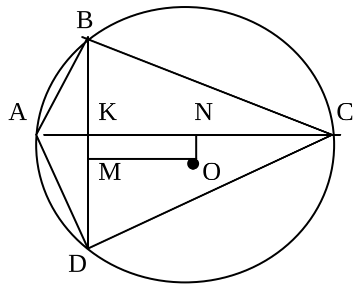
$$\log_b c < 0 \quad \Rightarrow \quad c > 1,$$

un

$$\log_c a < 0 \quad \Rightarrow \quad a < 1.$$

Pretruna, tātad vismaz viens no logaritmiem irt pozitīvs.

95.37. Skat. 22. zīm.



22. zīm.

Izmantojot Pitagora teorēmu, iegūstām

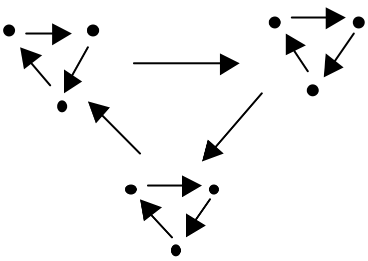
$$\begin{aligned}
&AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = \\
&2 \cdot \left(AK^2 + BK^2 + CK^2 + DK^2\right) = \\
&2 \cdot (AN - KN)^2 + 2 \cdot (AN + KN)^2 + 2 \cdot (BM - KM)^2 + 2 \cdot (BM + KM)^2 = \\
&4 \cdot \left(AN^2 + NO^2\right) + 4 \cdot \left(BM^2 + MO^2\right) = \\
&4 \cdot AO^2 + 4 \cdot BO^2 = 8 \cdot R^2.
\end{aligned}$$

95.38. Visu šādu skaitļu summa ir mazāka par

$$S = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \cdots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \cdots\right) =$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{15}{8} < 2$$

95.39. Šāda shēma ir parādīta 23. zīmējumā.



23. zim.

95.40. Konstruējam uz riņķa kā ekvatoriāla šķēluma sfēru ar rādiusu *R*; caur lentu malām novelkam plaknes perpendikulāri šim šķēlumam. Ja lentas pārklāj riņķi, tad slāņi starp plaknēm apsedz visu sfēras virsmu. Bet slānis ar biezumu *h* apsedz virsmu, kas nav lielāka par $2\pi R \cdot h$ (joslas vai segmenta laukums ar augstumu *h* ir tieši $2\pi R \cdot h$, bet slānis varbūt daļēji iet ārpus sfēras). Tāpēc

$$\sum 2\pi R \cdot h_i \geq 4\pi R^2 ,$$

no kurienes $\sum h_i \geq 2R$.