45. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1994./95. m.g.

UZDEVUMI

5. klase

95.1. Ar kādu ciparu beidzas reizinājums

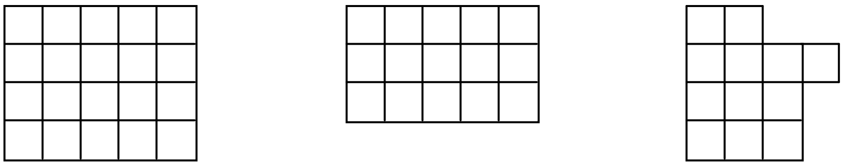
$$11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 22\cdot 23\ ?$$

95.2. Vai zvaigznīšu vietā (skat. 1. zīmējumu) var ierakstīt pa naturālam skaitlim (daži no tiem var būt arī vienādi) tā, lai katru četru pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa būtu 15 ?

$$5 * * * * * * * * * * * 6$$

1. zim.

95.3. Kuras no 2. zīmējumā attēlotajām figūrām var sagriezt 3 vienādās daļās? Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.

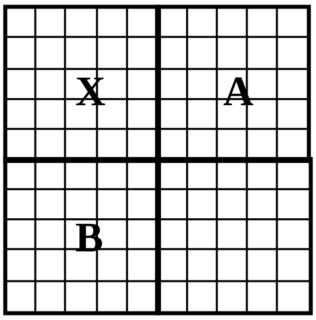


a) b) c)

2. zīm.

95.4. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, ... , 19, 20. Ar vienu gājienu var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt vieninieku. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

95.5. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām. Desmit rūtiņās ievilkts pa krustiņam tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā ir tieši viens krustiņš. Tālāk kvadrāts sadalīts četros 5×5 rūtiņu kvadrātos (skat. 3. zīm.).



3. zīm.

Pierādīt, ka daļās A un B ir vienāds skaits krustiņu. Vai tas var būt 1 katrā no daļām A un B ?

6. klase

95.6. Summā $12345 + 67890$ katrā saskaitāmajā ievietot decimālo komatu tā, lai iegūtā summas vērtība pārsniegtu 700, bet būtu mazāka par 1000. Atrodiet visas iespējas un pierādiet, ka citu nav.

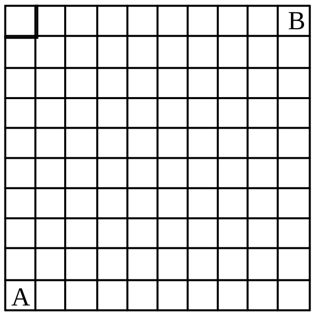
95.7. Parādīt, ka 8×8 rūtiņu kvadrātu var sagriezt 12 dažādos taisnstūros. Pietiek uzrādīt vienu veidu, kā to izdarīt. Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.

95.8. Virknē izrakstīti 1994 cipari. Katru divu blakus uzrakstītu ciparu veidotais skaitlis dalās vai nu ar 19, vai ar 21.

Pirmais cipars ir 7. Kāds ir pēdējais?

95.9. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Ar vienu gājienu var izvēlēties jebkurus divus no tiem un abiem pieskaitīt vieninieku. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai visi skaitļi kļūtu vienādi?

95.10. Kvadrāts sastāv no 10×10 rūtiņām (skat. 4. zīm.).



4. zīm.

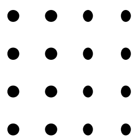
No rūtiņas *A* vienlaicīgi iziet vairāki rūķīši un , virzoties tikai uz augšu un pa labi, aiziet uz rūtiņu *B*. Katrā no pārējām 98 rūtiņām atrodas pa dārgakmenim. Kāds mazākais rūķīšu skaits pietiekams, lai viņi pa ceļam varētu savākt visus dārgakmeņus?

7. klase

95.11. Parādīt, ka var izvēlēties 8 skaitļus tā, lai no to summām pa divi tieši sešas būtu negatīvas, bet pārējās – pozitīvas. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

95.12. Dots, ka *a* un *b* ir divi naturāli skaitļi. Vai var būt, ka to lielākais kopējais dalītājs ir 32, bet to mazākais kopīgais dalāmais ir 1200 ?

95.13. Kvadrātiska režģa veidā izvietoti 16 punkti (skat. 5. zīm.).



5. zīm.

Pierādīt, ka tos visus var pārsvītrot, novelkot slēgtu līniju, kas sastāv no 6 taisniem posmiem (līniju velkot, zīmuli nedrīkst atraut no papīra; pa vienu un to pašu taisnas līnijas gabalu nedrīkst vilkt divas vai vairāk reizes). Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

95.14. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai rūtiņās var ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai kolonnās un rindiņās ierakstīto skaitļu summas būtu 8 viens otram sekojoši naturāli skaitļi ?

95.15. Rūtiņu burtnīcas lapā katra rūtiņa nokrāsota balta vai melna. Zināms, ka katrā kvadrātā 3×3 rūtiņas ir vismaz 7 melnas rūtiņas.
Pierādīt, ka var atrast 2×2 rūtiņu kvadrātu, kurā visas rūtiņas ir melnas.

8. klase

95.16. Vai var uzzīmēt 6 punktus, no kuriem nekādi trīs neatrodas uz vienas taisnes, un novilkt 9 nogriežņus ar galapunktiem šajos punktos, lai nerastos neviens trijstūris, kam visas virsotnes ir kādi no šiem 6 punktiem?

95. 17. Naturāla skaitļa *x* ciparu summa ir *y*; skaitļa *y* ciparu summa ir *x*. Pierādīt, ka $x=y$.

95.18. Pierādīt, ka $3^{100}+4$ nav pirmskaitlis.

95.19. Pa apli izrakstīti 99 skaitļi. Katru triju pēc kārtas uzrakstītu skaitļu summa ir pozitīva. Kāds lielākais daudzums negatīvu skaitļu var būt starp uzrakstītajiem skaitļiem?

95.20. Uzzīmētas vairākas riņķa līnijas; nekādas divas no tām nekrustojas un neatrodas viena otras iekšpusē.
Pierādīt, ka starp tām var atrast tādu riņķa līniju, kas pieskaras ne vairāk kā 6 citām.

9. klase

95.21. Dots, ka $a+b=1$. Pierādīt, ka $a^3+b^3+3ab=1$.

95.22. Plaknē uzzīmētas 10 riņķa līnijas. Pierādīt, ka starp tām var atrast divas, kas pieskaras vienādam skaitam pārējo.

95.23. Vai eksistē 4 dažādi naturāli skaitļi, kuru summa vienāda ar to reizinājumu?

95.24. Katra no izliekta 4-stūra diagonālēm sadala to divos trijstūros ar vienādiem laukumiem. Pierādīt, ka šis četrstūris ir paralelograms.

95.25. Pierādīt, ka skaitlis
$$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)+1$$
ir divnieka pakāpe ar naturālu kāpinātāju.

10. klase

95.26. Zināms, ka katram no vienādojumiem

$$x^2 + 2ax + b^2 = 0 \qquad \text{un} \qquad x^2 + 2bx + a^2 = 0$$

eksistē atrisinājums. Vai noteikti $a = b$?

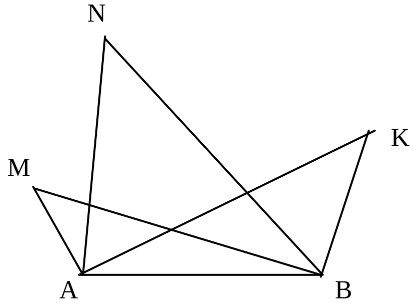
95.27. Kādiem naturāliem n skaitlis

$$2^n + 2$$

ir naturāla skaitļa kvadrāts?

95.28. Dots, ka $\angle AMB = \angle ANB = \angle AKB$ (skat.6.zīm.)

Pierādīt, ka šo triju vienādo leņķu bisektrises krustojas vienā punktā.



6. zīm.

95.29. Dots, ka a, b, c ir pozitīvi skaitļi un $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$.

Kas lielāks: $a^3 + b^3 + c^3$ vai $a^4 + b^4 + c^4$? (Zināms, ka šie lielumi nav vienādi.)

95.30. No regulāra 20-stūra virsotnēm deviņas nokrāsotas baltas.

Pierādīt, ka var atrast vienādsānu trijstūri, kura visas virsotnes ir baltas.

11. klase

95.31. Atrisināt vienādojumu

$$|x-1| + |x-3| + |x-5| = 3.$$

95.32. Dots, ka a, b, c ir naturāli skaitļi un reizinājums abc dalās ar 3, bet nedalās ar 9. Pieradīt, ka $a^2 + b^2 + c^2$ nedalās ar 3.

95.33. Pierādīt, ka patvaļīgiem skaitļiem a un b pastāv nevienādība

$$a^2 + b^2 + 2 > a + b + ab.$$

95.34. Izliekta četrstūra abu diagonāļu garumi ir 20. Pierādīt, ka vismaz viena no tā malām garāka par 14.

95.35. No regulāra 13-stūra virsotnēm sešas nokrāsotas melnas. Pierādīt, ka var atrast trapeci, kurai visas virsotnes ir melnas.

12. klase

95.36. Vai visi skaitļi $\log_a b$, $\log_b c$, $\log_c a$ var būt negatīvi?

95.37. Izliekts četrstūris *ABCD* ar perpendikulārām diagonālēm ievilkts riņķa līnijā ar rādiusu *R*. Pierādīt, ka

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 8R^2.$$

95.38. Naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ visi ir dažādi, nepāra un nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas lielāks par 5. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

95.39. Volejbola turnīrā piedalās 9 komandas. Katra spēlē ar katru vienu reizi; neizšķirtu nav.

Pierādīt: ir iespējama situācija, ka turnīra beigās katrām divām komandām var atrast trešo, kas tās abas uzvarējusi.

95.40. Riņķis pilnībā pārklāts ar vairākām lentām; par lentu sauc joslu starp divām paralēlām taisnēm.

Pierādīt, ka lentu platumu summa nav mazāka par riņķa diametru.