47. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1996./97. m.g.

UZDEVUMI

5. klase

97.1. Vienādībā

$$16 \times 4 = 64$$

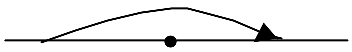
katru ciparu izmainīt par 1 tā, lai atkal iegūtu pareizu vienādību. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.

97.2. Naturālu skaitli atļauts reizināt ar 2 vai mainīt tā ciparus vietām (nedrīkst skaitļa sākumā novietot nulli). Vai ar šādām operācijām no 1 var iegūt

a) 96,

b) 116 ?

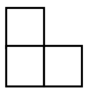
97.3. Uz taisnes ik pēc 1 m sēž sienāži. Brīdi pa brīdim kāds no sienāžiem pārlec pāri otram tā, ka attālums starp tiem nemainās (skat. 1. zīm.)



1. zīm.

Pēc kāda laika sienāži ieņēma tās pašas vietas, ko sākumā, tikai bija izvietojušies citā kārtībā. Pierādīt, ka malējie sienāži apmainījušies vietām.

97.4. Kādu lielāko daudzumu rūtiņu var iekrāsot kvadrātā ar izmēriem 5×5 rūtiņas tā, lai neviens stūrītis (skat 2. zīm.) nebūtu nokrāsots pilnībā ?



2. zīm.

97.5. Vai dažas rūtiņas burtnīcas lapā var nokrāsot melnas tā, lai katrs taisnstūris, kas sastāv no 2×4 rūtiņām, saturētu tieši divas melnas rūtiņas ?

6. klase

97.6. Vai var izvēlēties 4 skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi) tā, ka katri divi no tiem ir vai nu savstarpēji pretēji, vai savstarpēji apgriezti, pie tam sastopami abu veidu skaitļu pāri ?

97.7. Vai skaitlis

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\frac{31}{32}+\frac{63}{64}$$

ir vesels?

97.8. Kvadrāts sastāv no 12×12 rūtiņām. No tām 33 nokrāsotas melnas. Nekādām divām melnām rūtiņām nav kopīgas malas.
Pierādīt, ka var atrast tādu rūtiņu, kurai ir kopīga mala ar vismaz divām melnām rūtiņām.

97.9. Naturālu skaitli katru minūti var vai nu reizināt, vai dalīt vai nu ar 2, vai 3. Vai tieši vienas stundas laikā no skaitļa 24 var iegūt 108 ?

97.10. Vai dažas rūtiņas burtnīcas lapā var nokrāsot melnas tā, lai katrs taisnstūris, kas sastāv no 2×4 rūtiņām, saturētu tieši vienu melnu rūtiņu ?

7. klase

97.11. Uzrakstīt izteiksmi

$$1-(2-(3-(4-(5-(6-(7-(8-(9-x))))))))$$

formā $ax+b$, kur a un b – veseli skaitļi.

97.12. Vai pastāv tādi naturāli skaitļi n un k, ka

$$n^2=12\cdot k^3 \text{ ?}$$

97.13. Plaknē doti 5 punkti. Caur katriem diviem no tiem novilkta taisne. Cik dažādu taišņu novilkts?
Uzrādiet visas iespējas un pamatojiet, ka citu nav.

97.14. Jānis un Juris nopirka 100 litrus "Fanta"-s pudelēs pa 0,5 l, 0,7 l, un 1 l.
Pierādīt, ka viņi noteikti var sadalīt dzērienu divās līdzīgās daļās, neatverot pudeles.

97.15. Vai kvadrātu ar izmēriem 7×7 rūtiņas var sagriezt kvadrātos, kuru izmēri ir 2×2 un 3×3 rūtiņas?

8. klase

97.16. Saīsināt daļu $\frac{x^8-1}{x^2+1}$.

97.17. Ciparu virkni veido sekojoši: divi pirmie cipari tajā ir 2 un 3, un ar katru kārtējo gājienu aprēķina abu pēdējo virknes ciparu reizinājumu un tā ciparus pievieno virknei. Tātad virknes sākums ir šāds:

2, 3, 6, 1, 8, 8, 6, 4, ...

Vai šajā virknē ir sastopams cipars 7 ?

97.18. Izliektā četrstūrī *ABCD* izpildās vienādības

$$\angle A = \angle B, \quad BC = 1, \quad AD = 3.$$

Pierādīt, ka $CD > 2$.

97.19. Doti 17 dažādi naturāli skaitļi; neviens no tiem nepārsniedz 25.

Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus tādus, kuru reizinājums ir vesela skaitļa kvadrāts.

97.20. Istabas forma ir astoņstūris (varbūt ieliekts). Pierādīt, ka to var pilnībā apgaismot ar divām lampām.

(Lampas ir punktveida un izstaro uz visām pusēm; ja lampa atrodas pie sienas, tā apgaismo arī visu šo sienu).

9. klase

97.21. Pierādīt, ka pozitīviem *a*, *b* un *c* pastāv identitāte

$$\frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(c+b)}+\frac{c}{a(a+c)}=\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+a)}.$$

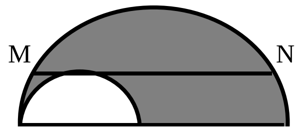
97.22. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 3 līdz 11 (visus dažādus) tā, lai pirmās rindiņas un pirmās kolonnas skaitļu reizinājumi būtu savā starpā vienādi; otrās rindiņas un otrās kolonnas – arī; trešās rindiņas un trešās kolonnas – arī.

97.23. Kādiem naturāliem *n* visi trīs skaitļi

$$n-1996, \quad n, \quad n+1996$$

ir pirmskaitļi?

97.24. Divu pusriņķu diametri atrodas uz vienas taisnes; horda MN paralēla diametriem un pieskaras mazākajam pusriņķim (skat. 3. zīm.).



3. zīm.

Dots, ka $MN = 20$. Aprēķināt iesvītrotās daļas laukumu.

97.25. Jānim ir 5 lati piecu, desmit un divdesmit santīmu monētās; monētu pavisam ir 39. Pierādīt, ka divdesmit santīmu monētu ir vairāk nekā piecu santīmu monētu

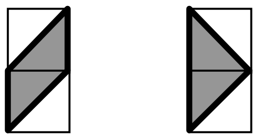
10. klase

97.26. Pierādīt, ka pozitīviem a un b pastāv nevienādība

$$a^2b + b^2a \le a^3 + b^3 \ .$$

97.27. Kvadrātā ievilkta riņķa līnija ar rādiusu R. Taisne, kas tai pieskaras, nošķeļ no kvadrāta taisnleņķa trijstūri. Pierādīt, ka tā hipotenūza īsāka par R.

97.28. Vai kvadrātu, kas sastāv no 15×15 rūtiņām, var pārklāt ar 225 figūrām, katra no kurām ir vai nu 4.zīm. parādītais paralelograms, vai trijstūris?



4. zīm.

97.29. Šaurleņķa trijstūris ievilkts riņķa līnijā. Pierādīt, ka punkti, kas simetriski tā augstumu krustpunktam attiecībā pret malām, atrodas uz riņķa līnijas

97.30. Dots, ka a, b, c, d -- naturāli skaitļi un $ab = cd$.

Pierādīt, ka $a + b + c + d$ nav pirmskaitlis.

11. klase

97.31. a) Pierādīt, ka pozitīviem x izpildās nevienādība $x+\frac{1}{x} \geq 2$.

b) Pierādīt, ka pozitīviem a, b un c vismaz viens no skaitļiem

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad \text{un} \quad \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$$

nav mazāks par 3.

97.32. Taisnleņķa trijstūra ABC laukums ir 1. Katrai ABC virsotnei atrodam simetrisko punktu attiecībā pret tās pretmalu. Atrast laukumu trijstūrim, kura virsotnes ir šie trīs simetriskie punkti.

97.33. Dots, ka $ABCD$ – izliekts četrstūris ar diagonāļu krustpunktu O; M un N ir atbilstoši trijstūriem ABO un CDO apvilkto riņķa līniju centri. Pierādīt, ka

$$MN \geq \frac{AB+CD}{4}.$$

97.34. Vai var uz 10 sarkanām un 1 zilas kartiņas uzrakstīt pa naturālam skaitlim tā, lai vienlaicīgi izpildās šādas trīs īpašības:

a) nekādu 5 sarkano skaitļu reizinājums nedalās ar zilo skaitli,

b) katru 6 sarkano skaitļu reizinājums dalās ar zilo skaitli;

c0 nekādi divi sarkanie skaitļi nedalās viens ar otru.

97. 35. Mēneša laikā katra klases skolēna draugu skaits mainījās tieši par 1 (visas draudzības ir abpusējas un tiek apskatītas tikai šīs klases ietvaros).

Pierādīt, ka klasē ir pāra skaits skolēnu.

12. klase

97.36. Pierādīt, ka patvaļīgiem $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pastāv identitāte

$$\frac{a_1}{a_2(a_1+a_2)}+\frac{a_2}{a_3(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_n}{a_1(a_n+a_1)}= \frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)}+\frac{a_3}{a_2(a_2+a_3)}+\cdots+\frac{a_1}{a_n(a_n+a_1)}.$$

97.37. Vai tornis var apstaigāt šaha galdiņu tā, lai katru divu rūtiņu kopējo malu šķērsotu tieši vienu reizi?

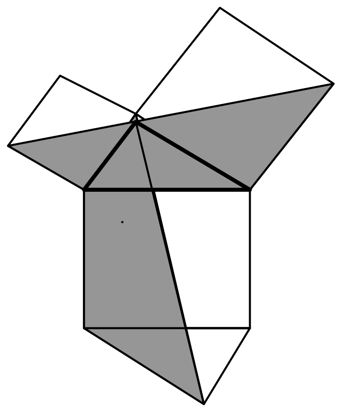
97.38. Ar $[x]$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x. Pierādīt: ja p un q – naturāli skaitļi, kuru lielākais kopīgais dalītājs ir 1, tad

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=$$
$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right].$$

97.39. Skaitļi *a*, *b*, *c*, *d* atrodas starp 0 un 1. Pierādīt, ka var atrast tādu *x*, ka $0 < x < 1$ un

$$\frac{1}{|x-a|}+\frac{1}{|x-b|}+\frac{1}{|x-c|}+\frac{1}{|x-d|}<40\,.$$

97.40. Saskatiet Pitagora teorēmas pierādījumu 5. zīm. un pierakstiet to ar visiem pierādījumiem (tā autors ir Leonardo-da Vinči).



5. zīm.