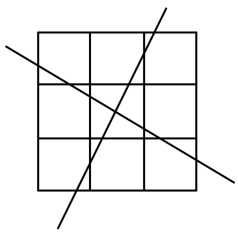
# 48. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

**1997./98. m.g.**

## ATRISINĀJUMI

**98.1.** Pats labējais rūķītis noteikti ir melis; tātad visi pārējie rūķīši runā patiesību. Starp rūķīšiem ir tieši viens melis.

**98.2.** Jā, to var izdarīt; skat. 5. zīm.



5. zīm.

**98.3.** Šo uzdevumu jārēķina pretējā virzienā. Pirms pēdējā cipara nosvītrošanas, bija iegūts skaitlis $\overline{11x}$. Tā kā šis skaitlis vienāds ar $7y$, tad tam jādalās ar 7. No šejienes viegli iegūt, ka šis skaitlis ir 112 vai 119.

a) Pirmajā gadījumā $y = 16$; tātad pirms tam bija uzrakstīts skaitlis $\overline{16a}$. Tā kā $11z = \overline{16a}$, tad viegli redzēt, ka $z = 15$ ( jo $11 \cdot 15 = 165$).

b) Otrajā gadījumā $y = 17$; tātad pirms tam bija uzrakstīts skaitlis $\overline{17a}$. Tā kā $11z = \overline{17a}$, tad $z = 16$ (jo $11 \cdot 16 = 176$).

**98.4.** Jā, to var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 6. zīmējumā.

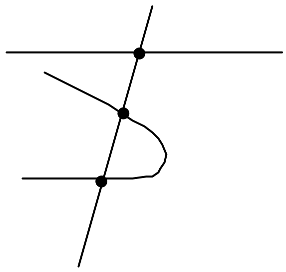
| | | | |
|---|---|---|---|
| **M** | **M** | **Z** | **M** |
| **Z** | **M** | **M** | **M** |
| **M** | **M** | **M** | **Z** |
| **M** | **Z** | **M** | **M** |

6. zīm.

**98.5.** Katrā gadījumā mākslinieks nosūta tieši 7 kartiņas. Tātad kopējam apsveikuma kartiņu skaitam ir jādalās ar 7, bet 1997 ar 7 nedalās. Tātad prasītā situācija nav iespējama.

**98.6.** a) Nē, nevar. Tā kā diviem nogriežņiem ir ne vairāk par vienu krustpunktu, tad iespējamais krustpunktu skaits katram nogrieznim ir 0, 1 vai 2. Taču, ja kādam nogrieznim ir 0 krustpunktu ar diviem citiem, tad nav nogriežņa, kam ir 2 krustpunkti ar citiem (jo ar vienu no tiem tas nekrustojas). Tas nozīmē, ka atliek tikai 2 vērtības, bet nogriežņu ir 3.

b) Jā, tādas līnijas var uzzīmēt; skat. 7. zīm.



7. zīm.

**98.7.** a) Sākot no labās puses, redzam, ka pārnesumu nevar būt, jo divu ciparu summa nevar būt vienāda ar 19.

b) Nē, šajā gadījumā iespējams pretpiemērs, kurā ir pārnesumi: $4999+4999=9998$.

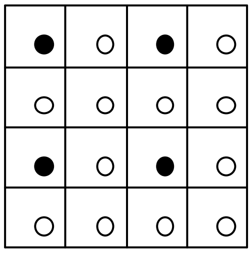
**98.8.** Nē, nevar būt. Tā kā $512=2^9$, tad visi skaitļa 512 dalītāji ir divnieka pakāpes. Bet pat piecu dažādu mazāko divnieku pakāpju reizinājums

$$2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{10} = 1024$$

ir lielāks par 512.

**98.9.** Kvadrātā $2\times2$ rūtiņas nevar būt vairāk par vienu tādu rūķīti; tāpēc lielākais iespējamais rūķīšu skaits ar melnajām cepurītēm nepārsniedz 4 (jo kvadrātu $4\times4$ var sadalīt četros kvadrātos ar izmēriem $2\times2$ rūtiņas).

Tas, ka var būt 4 rūķīši ar melnām cepurītēm, redzams 8. zīmējumā.



8. zīm.

**98.10.** a) Jā, var; piemēram, šādi:

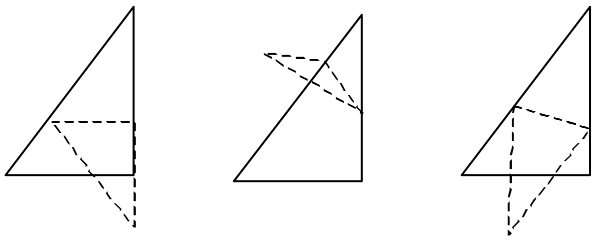
$17 \to 34 \to 4 \to 8 \to 16 \to 1$.

b) Nē, nevar. Sākotnējais skaitlis 17 nedalās ar 3. Ja skaitlis nedalās ar 3, tad, izpildot norādītās operācijas, arī rezultāts nedalīsies ar 3. Tātad arī pēc vairākām operācijām rezultāts nedalīsies ar 3 (atcerēsimies, ka dalāmība ar 3 ir atkarīga no tā, vai skaitļa ciparu summa dalās ar 3). Tas nozīmē, ka skaitli 15 iegūt nevarēs

**98.11.** Nē, nevar būt. Vismaz viens no skaitļiem (teiksim $a$) ir pozitīvs. Bet tādā gadījumā

$a+b+c > b+c > 0$.

**98.12.** Piemēri parādīti 9. zīmējumā.



9. zīm.

**98.13.** Ja dalījumā rodas piecinieks, tas nozīmē, ka iepriekšējais atlikums atrodas starp $0{,}5 \cdot 1997$ un $0{,}6 \cdot 1997$. Šajā intervālā ir tieši 200 veseli skaitļi. Tiklīdz atlikumi atkārtojas, periods beidzas.

**98.14.** Otreiz pārklātos ekvatora posmus var iegūt, pirmajā reizē pārklāto daļu "pabīdot" uz austrumiem par viena koka garumu. Tātad arī otrajā reizē koki pārklās tieši pusi no ekvatora garuma.

**98.15.** Apzīmēsim dotos skaitļus ar $a_1, a_2, \dots, a_8$. Pēc pirmā gājiena iegūstam

$b_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ (analoģiskas formulas ir pārējiem locekļiem).

Pēc otrā gājiena

$$c_1 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 =$$
$$= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 3a_5 + 2a_6 + a_7 \equiv$$
$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 \pmod 2.$$

Pēc trešā gājiena

$$d_1 \equiv (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) +$$
$$(a_2 + a_4 + a_6 + a_8) +$$
$$(a_3 + a_5 + a_7 + a_1) +$$
$$(a_4 + a_6 + a_8 + a_2) \equiv 0 \pmod 2.$$

Tātad jau pēc trešā gājiena visi skaitļi ir pāra skaitļi; protams arī pēc ceturtā gājiena iegūsim pāra skaitļus.

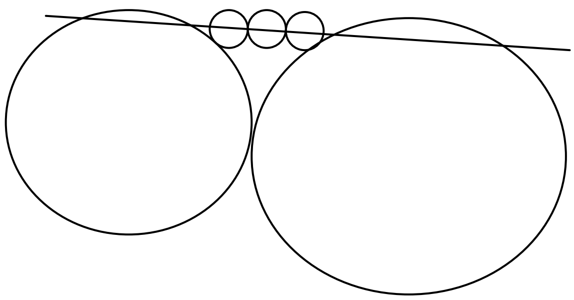
**98.16.** Jā, visos gadījumos viegli norādīt atbilstošos piemērus:

a) $2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 0$ un $3 + (-2) > 0$,

b) $2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0$ un $(-3) + 2 < 0$,

c) $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ un $0 + 0 = 0$.

**98.17.** Jā, to var izdarīt; skat. 10. zīmējumu.



10. zīm.

**98.18.** Nē, tāds naturāls skaitlis $a$ neeksistē. Tā kā

$$\frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}} < 1,$$

tad $a$ ir skaitļa $\frac{41}{17}$ veselā daļa; tātad $a = 2$. Bet pārbaude parāda, ka

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{29}{12} \neq \frac{41}{17}.$$

**98.19.** To var izdarīt, piemēram, tā, ka parādīts 11. zīmējumā.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 |

11. zīm.

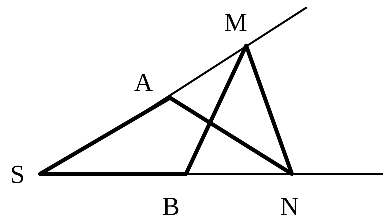
**98.20.** Izkrāsosim doto kvadrātu šaha galdiņa kārtībā; tad starpība starp melno rūtiņu skaitu un balto rūtiņu skaitu būs 1. Katra pirmā tipa figūra pārklāj vienādu skaitu balto un melno rūtiņu; bet katra otrā tipa figūra (krusts) pārklāj par trim vienas krāsas rūtiņām vairāk nekā otras krāsas rūtiņas. Tātad, ja pārklāšana būtu iespējama, starpība starp melno un balto pārklāto rūtiņu skaitu dalītos ar 3, bet šajā gadījumā tā nedalās ar 3.

**98.21.** Pareizinot doto vienādību ar $a-b$, iegūstam

$$\left(a^2+ab+b^2\right)\cdot(a-b)=a-b \quad \Rightarrow$$

$$a^3-b^3=a-b \quad \Rightarrow \quad a^3+b=b^3+a.$$

**98.22.** Skat. 12. zīmējumu.




12. zīm.

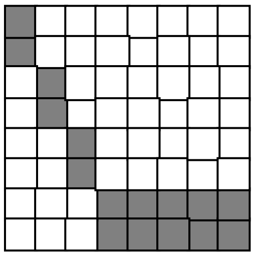
Ja $\angle ASB=\alpha$ tad $\angle MAN=2\alpha$, kā vienādsānu trijstūra $SAN$ ārējais leņķis; arī $\angle AMN=2\alpha$, jo trijstūris $ANM$ ir vienādsānu.

Aplūkojot trijstūri *SMN*, iegūstam vienādību:

$$\alpha+2\alpha+2a=180°.$$

No šejienes seko, ka meklētais leņķis ir $36°$.

**98.23.** Tā kā katrā kolonnā jānokrāso vismaz divas rūtiņas, tad kopējais nokrāsoto rūtiņu skaits ir ne mazāks par 16. Piemērs ar 16 nokrāsotām rūtiņām redzams 13. zīmējumā.



13. zīm.

**98.24.** Izvietosim skaitļus šādā tabulā:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 9 | ..... | 1993 | 1997 |
| 2 | 6 | 10 | ..... | 1994 | |
| 3 | 7 | 11 | ..... | 1995 | |
| 4 | 8 | 12 | ..... | 1996 | |

Vismaz vienā rindā ir vismaz 251 izvēlētais skaitlis (ja katrā rindā būtu ne vairāk par 250 skaitļiem, tad kopā to būtu ne vairāk par 1000).

Tā kā rindā ir ne vairāk par 500 skaitļiem, tad vismaz divi no rindā izvietotajiem skaitļiem atradīsies blakus; šo skaitļu starpība ir 4.

**98.25.** Ja $x \geq y$, tad $x^2 \geq xy \geq y^2$. Tā kā šo trīs skaitļu summa ir vienāda ar 3, tad divu lielāko skaitļu summa ir ne mazāka par 2; t.i.

$$x^2 + xy \geq 2 .$$

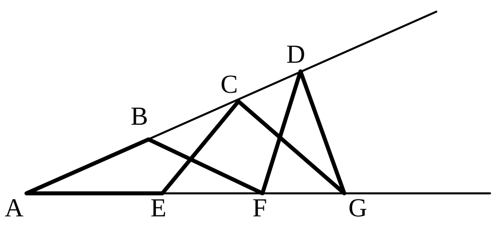
Ja $x < y$, tad pierādījums analoģisks.

**98.26.** Jā, var būt. Ja $n$ patvaļīgs skaitlis, tad $(n+1)+(-n)=1$ un skaitlis

$$(n+1)^3 + (-n)^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

var būt patvaļīgi liels.

**98.27.** Skat. 14. zīmējumu.




14. zīm.

Apzīmēsim leņķi $\angle BAE$ ar $\alpha$. Tad $\angle DBF = 2\alpha$, kā vienādsānu trijstūra *ABF* ārējais leņķis.

Tā kā trijstūris *BFD* ir vienādsānu, tad arī $\angle BDF = 2\alpha$.

Trijstūri *DAG* un *GDF* ir līdzīgi (vienādsānu trijstūri ar vienādiem leņķiem pie pamata); tāpēc $\angle FDG = \angle DAG = \alpha$.

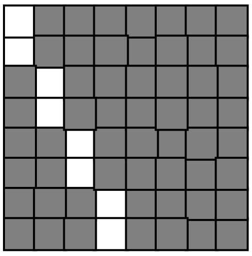
Aplūkojot trijstūri *ADG*, iegūstam

$$180° = \angle DAG + \angle ADG + \angle AGD = \alpha + (2\alpha + \alpha) + (2a + \alpha) = 7\alpha .$$

Tātad meklētais leņķis ir vienāds ar $\frac{180°}{7}$.

**98.28.** Katrā rindā ir vismaz viena nenokrāsota rūtiņa; tātad nokrāsoto rūtiņu skaits nepārsniedz $64 - 8 = 56$.

Tas, ka var nokrāsot 56 rūtiņas, lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, redzams 15. zīmējumā.



15. zīm.

**98.29.** No dotā seko, ka arī skaitlis $(3a+1) - 3(a-8) = 25$ dalās ar pirmskaitli *p*. Tātad $p = 5$.

Jāpamato arī, ka eksistē šāds naturāls skaitlis *a*, kuram $3a+1$ un $a-8$ dalās ar 5. Var, piemēram, izvēlēties skaitli $a = 13$.

**98.30.** Apzīmēsim taisnstūru malas ar $x_i$ un $y_i$, bet to laukumus ar $S_i$ . Tad

$$\begin{aligned}
&d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 = \\
&(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) + \cdots + (x_n^2 + y_n^2) \geq \\
&(2x_1y_1) + (2x_2y_2) + \cdots + (2x_ny_n) = \\
&2(S_1 + S_2 + \cdots + S_2) = 2S = d^2 .
\end{aligned}$$

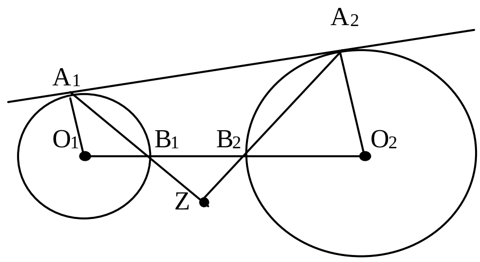
**98.31.** Nē, nav iespējams. Trijstūrī pret lielāku malu atrodas lielāks leņķis. Tātad,

a) ja $a > b$, tad $\alpha > \beta$ un $(a-b)\cdot(\alpha - b) > 0$;

b) ja $a < b$ , tad $\alpha < \beta$ un $(a-b)\cdot(\alpha - b) > 0$;

c) ja $a = b$, tad $\alpha = \beta$ un $(a-b)\cdot(\alpha - b) = 0$.

**98.32.** Skat. 16. zīmējumu.




16. zīm.

Tā kā $\angle A_1O_1B_1 + \angle A_2O_2B_2 = 180°$, tad

$$\angle B_1ZB_2 = 180° - \left(\angle ZB_1B_2 + \angle ZB_2B_1\right) =$$
$$180° - \left(\angle O_1B_1A_1 + \angle O_2B_2A_2\right) =$$
$$180° - \left(\frac{180° - \angle A_1O_1B_1}{2} + \frac{180° - \angle A_2O_2B_2}{2}\right) =$$
$$180° - 180° + \frac{\angle A_1O_1B_1 + \angle A_2O_2B_2}{2} = 90°.$$

Prasītais pierādīts.

**98.33.** Kāpinot doto vienādību kvadrātā, iegūstam:

$$a + 2\sqrt{ab} + b = c + 2\sqrt{cd} + d \quad \Rightarrow$$
$$2\sqrt{ab} - 2\sqrt{cd} = c + d - a - b.$$

Atkal kāpinot šo vienādību kvadrātā, iegūstam:

$$4ab + 4cd - 8\sqrt{abcd} = (c + d - a - b)^2.$$

Tātad $\sqrt{abcd}$ ir racionāls skaitlis; tas nozīmē, ka *abcd* ir racionāla skaitļa kvadrāts. Naturāls skaitlis, kas ir racionāla skaitļa kvadrāts, ir naturāla skaitļa kvadrāts (tiešām, ja racionāls skaitlis nav vesels $r = \frac{m}{n}$ -- nesaīsināma daļa, $n > 1$, tad arī tā kvadrāts $r^2 = \frac{m^2}{n^2}$ nav vesels skaitlis).

**98.34.** Pareizināsim doto sakarību $x_{n+3} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}x_{n+2}}$ ar $x_{n+1}x_{n+2}$; iegūsim:

$$x_{n+3}x_{n+2}x_{n+1} = x_{n+2}x_{n+1}x_n - 1.$$

Aplūkosim jaunu virkni $y_n = x_{n+2}x_{n+1}x_n$. No iepriekšējās vienādības seko, ka

$$y_1 = 15 \quad \text{un} \quad y_{n+1} = y_n - 1.$$

Tātad $y_{16} = 0$; tas nozīmē, ka

$$x_{18} \cdot x_{17} \cdot x_{16} = 0.$$

Tātad viens no reizinātājiem vienāds ar 0. Prasītais pierādīts. Bet nav grūti pamatot, ka tieši $x_{18} = 0$, jo $x_{17} \cdot x_{16} \cdot x_{15} = y_{15} = 1$.

**98.35.** Aplūkosim pilsētu *A*, kurā ieiet visvairāk ceļu (šo ceļu skaitu apzīmēsim ar *m)*. Pierādīsim, ka tai izpildās uzdevuma prasības.

Pieņemsim pretējo, ka ir tāda pilsēta *B* no kuras nevar aizbraukt uz *A* augstākais pa diviem ceļiem. Pilsētu grupā *X*, no kurām iet ceļš uz *A* ir *m* pilsētas. Skaidrs, ka no *B* nevar aizbraukt uz grupas *X* pilsētu un uz pilsētu *A*; tātad no šīm $m+1$ pilsētām iet ceļš uz *B*, bet tā ir pretruna ar pieņēmumu, ka pilsētā *A* ieiet visvairāk ceļu. Prasītais pierādīts.

**98.36.** Jā, visas prasītās nevienādības var izpildīties, piemēram, ja $x = 60°$ un $y = 150°$. Tiešām,

$$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} = \sin 150°,$$

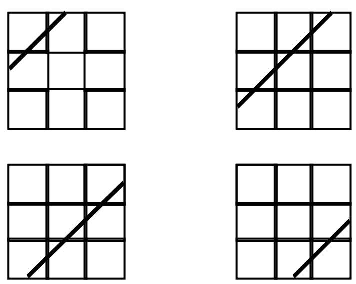
$$\cos 60° = \frac{1}{2} > -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 150°,$$

$$\operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} > -\frac{\sqrt{3}}{3} = \operatorname{tg} 150°,$$

$$\operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3} > -\sqrt{3} = \operatorname{ctg} 150°.$$

**98.37.** Vienādojuma kreisā puse ir monotoni augoša funkcija; tāpēc katru vērtību (tai skaitā 31) tā var pieņemt tikai vienu reizi. Vienīgo atrisinājumu var uzminēt: $x = 3$. Tiešām, $3 + 3^3 + \log_3 3 = 31$.

**98.38.** Kubs $3\times3\times3$ sastāv no trim slāņiem, kuru horizontālās plaknes (tādas ir četras) parādītas 17. zīmējumā. Zīmējumā attēloti to šķēlumi ar doto plakni.



17. zīm.

No šejienes redzams, ka dotā plakne šķeļ 6 kubiņus apakšējā un augšējā slānī un 7 kubiņus vidējā slānī; tātad kopā 19 kubiņus.

**98.39.** Nē, šādi naturāli skaitļi neeksistē, jo doto summu starpība ir mazāka par 1; tātad tās abas nevar būt veseli skaitļi. Pierādīsim šo apgalvojumu:

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)-\left(\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_n+1}\right)=$$

$$\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_1+1}\right)+\left(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_2+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}\right)\leq$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{M}-\frac{1}{M+1}\right)=1-\frac{1}{M+1}<1.$$

Ar $M$ apzīmēts lielākais no skaitļiem $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

**98.40.** No uzdevuma nosacījumiem seko, ka tas darbinieks, kam ir visatbildīgākais amats, runā patiesību, bet tas, kam ir vislielākā alga, melo. Tātad starp darbiniekiem ir gan "meļi" gan "patieši".

Aplūkosim "patiesu" darbinieku ar vislielāko algu starp "patiesajiem" darbiniekiem. No viņa otrā apgalvojuma seko, ka ir vismaz 20 meļi, kas saņem lielāku algu nekā viņš.

Aplūkosim "melīgu" darbinieku ar mazāko algu starp "meļiem"; viņa otrais apgalvojums ir meli, tātad bez viņa nav vairāk par 19 meļiem; tātad meļu ir ne vairāk kā 20. Kopā iegūstam, ka meļu ir tieši 20.

Līdzīgi pierāda, ka ir tieši 10 "patiesi" darbinieki. Tātad firmā strādā 30 darbinieki.