48. SAGATAVOŠANĀS OLIMPIĀDE MATEMĀTIKĀ

1997./98. m.g.

UZDEVUMI

5. klase

98.1. Rindā stāv 12 rūķīši. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā taisnību, vai vienmēr melo. Katrs rūķītis apgalvo: "no manis pa labi stāv vismaz viens melis". Cik starp rūķīšiem ir meļu ?

98.2. Kvadrāts sastāv no 3×3 vienādām rūtiņām. Vai tās visas var pārsvītrot ar divām taisnēm?
(Taisne pārsvītro rūtiņu, ja tā iet caur kādu rūtiņas iekšēju punktu.)

98.3. Jānis izvēlējās naturālu skaitli, pareizināja to ar 11, nosvītroja rezultāta pēdējo ciparu, iegūto skaitli pareizināja ar 7, nosvītroja rezultāta pēdējo ciparu un ieguva 11. Kādu skaitli Jānis sākumā izvēlējās? Atrodiet visas iespējas un pamatojiet, ka citu iespēju nav.

98.4. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Vai var katrā rūtiņā nostādīt pa bērnam tā, lai katram zēnam blakus stāvētu tieši 3 meitenes, bet katrai meitenei blakus stāvētu tieši 1 zēns?
(Divi bērni stāv blakus, ja tie atrodas rūtiņās ar kopīgu malu).

98.5. Katrs no 8 māksliniekiem nosūtīja katram citam apsveikumu sakarā ar piedalīšanos jebkurā gleznu izstādē.
(Dažādi mākslinieki var piedalīties dažādā skaitā izstāžu).
Vai var gadīties, ka pavisam kopā tiek nosūtīti tieši 1997 apsveikumi?

6. klase

98.6. Vai var uzzīmēt trīs taisnes nogriežņus tā, lai tiem visiem būtu dažāds krustpunktu skaits ar abiem pārējiem?
Bet vai tā var uzzīmēt trīs patvaļīgas līnijas?

98.7. Saskaitot divus naturālus skaitļus, summā ieguva 9999. Pierādīt, ka saskaitīšanas procesā neradās neviens pārnesums no vienas šķiras otrā. Vai to var apgalvot, ja summa bija 9998 ?

98.8. Piecu naturālu skaitļu reizinājums ir 512.
Vai visi dotie skaitļi var būt dažādi?

98.9. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katras rūtiņas centrā apmetas rūķītis ar baltu vai melnu cepurīti galvā, pie tam nekādi divi rūķīši ar melnām cepurītēm neredz viens otru (skatu aizsedz rūķīši ar baltām cepurītēm.). Kāds ir lielākais iespējamais rūķīšu skaits ar melnām cepurītēm?

98.10. Naturālu skaitli atļauts reizināt ar 2, kā arī izsvītrot no tā pieraksta ciparus 0, 3, 6, 9 (varbūt tikai daļu no tiem). Vai vairākkārt izpildot šādus gājienus, no skaitļa 17 var iegūt

a) skaitli 1,

b) skaitli 15 ?

7. klase

98.11. Doti 3 skaitļi. Katru divu skaitļu summa ir pozitīva. Vai visu skaitļu summa var būt negatīva?

98.12. Pierādīt, ka, vienu reizi salokot trijstūrveida papīra lapu, var iegūt

a) piecstūri,

b) sešstūri,

c) septiņstūri.

Pietiek parādīt vienu lapu, kurai tas iespējams.

98.13. Pierādīt, ka daļas $\frac{1}{1997}$ mazākais periods satur ne vairāk par divsimt pieciniekiem.

98.14. Planētai Mungo ir lodes forma. Uz tās ekvatora aug vienāda garuma koki. Pūšot austrumu vējam, visi koki noliecas pie planētas virsmas, cieši tai piekļaujoties; kopā koki pārklāj tieši pusi ekvatora garuma (varbūt dažus posmus pārklāj vairākkārt). Pūšot rietumu vējam, koki noliecas pretējā virzienā, atkal cieši piekļaujoties planētas virsmai. Pierādīt, ka arī tagad koki pārklāj tieši pusi ekvatora garuma.

98.15. Pa apli izrakstīti 8 naturāli skaitļi. katram skaitlim aprēķina to četru skaitļu summu, kas tam seko pulksteņa rādītāja virzienā, un pēc tam visus skaitļus aizstāj ar aprēķinātajām summām. Pierādīt, ka 4 reizes atkārtojot šādas operācijas, visi skaitļi kļūs pāra skaitļi.

8. klase

98.16. Dots, ka $2x+3y=0$. Vai var būt, ka $x+y$ ir

a) pozitīvs skaitlis,

b) negatīvs skaitlis,

c) nulle.

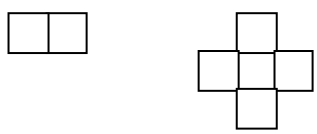
98.17. Vai var uzzīmēt 5 riņķa līnijas tā, ka pirmā pieskaras otrajai, otrā – trešajai, ..., piektā – pirmajai? Visas pieskaršanās ir ārējas; citu kopēju punktu bez minētajiem pieskaršanās punktiem riņķa līnijām nav, pie tam tās visas jāvar krustot ar vienu taisni.

98.18. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis *a*, ka

$$a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a}}}=\frac{41}{17}?$$

98.19. Pierādīt, ka kvadrātā 6×6 rūtiņas katrā rūtiņā var ierakstīt pa naturālam skaitlim tā, lai visu ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis, bet katrā taisnstūri 1×4 ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis.

98.20. Vai kvadrātu, kas sastāv no 101×101 rūtiņām, var sagriezt daļās tā, lai katra daļa būtu viena no 1. zīm. attēlotajām daļām?



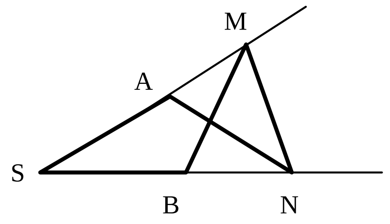
1. zīm.

9. klase

98.21. Dots, ka $a^2+ab+b^2=1$. Pierādīt, ka

$$a^3 + b = b^3 + a .$$

98.22. Skat. 2. zīm.



2. zīm.

Dots, ka $SA = SB = AN = BM = BN$. Aprēķināt $\angle ASB$.

98.23. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Kāds mazākais daudzums rūtiņu jānokrāso, lai katrā rindā būtu nokrāsots nepāra skaits, bet katrā kolonnā pāra skaits (ne 0) rūtiņu?

98.24. Uz tāfeles uzrakstīts 1001 naturāls skaitlis; tie visi ir dažādi un nepārsniedz 1997. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus skaitļus, kuru starpība ir 4.

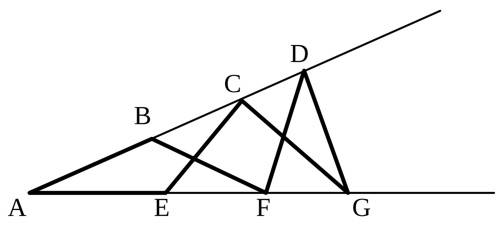
98.25. Dots, ka $x^2 + xy + y^2 = 3$. Pierādīt, ka vai nu $x^2 + xy \geq 2$, vai arī $y^2 + xy \geq 2$, ja x un y – pozitīvi skaitļi.

10. klase

98.26. Dots, ka $x + y = 1$. Vai var būt, ka

$$x^3 + y^3 > 1997 ?$$

98.27. Skat. 3. zīm.



3. zīm.

Dots, ka $AB = BF = FD = DG = SE = EA$.

Aprēķināt $\angle BAE$.

98.28. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Kādu lielāko daudzumu rūtiņu var nokrāsot, lai katrā rindā būtu nokrāsots nepāra skaits, bet katrā kolonnā būtu nokrāsots pāra skaits rūtiņu?

98.29. Dots, ka *a* – naturāls skaitlis, *p* – pirmskaitlis, pie tam $3a+1$ un $a-8$ dalās ar *p*. Aprēķināt *p*.

98.30. Kvadrāts ar diagonāles garumu *d* sagriezts *n* taisnstūros, kuru diagonāļu garumi ir $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Pierādīt, ka

$$d^2 \le d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 .$$

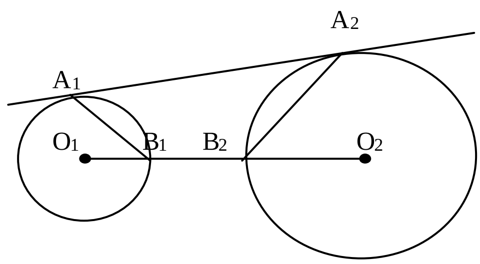
11. klase

98.31. Trijstūrī pret malām ar garumiem *a* un *b* atrodas leņķi, kuru lielumi ir atbilstoši α un β. Vai iespējams, ka

$$(a-b)\cdot(\alpha-\beta)<0 .$$

98.32. Divām riņķa līnijām ar centriem O_1 un O_2 nav kopīgu punktu.. To kopīgā ārējā pieskaras tām atbilstoši punktos A_1 un A_2, bet nogrieznis O_1O_2 krusto tās atbilstoši punktos B_1 un B_2.

Pierādīt, ka $A_1B_1 \perp A_2B_2$. Skat. 4. zīm.



4. zīm.

98.33. Dots, ka *a*, *b*, *c*, *d* – naturāli skaitļi un

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}+\sqrt{d} .$$

Pierādīt, ka *abcd* ir naturāla skaitļa kvadrāts.

98.34. Skaitļu virkni $x_1, x_2, \ldots$ veido sekojoši:

$$x_1=1,\ x_2=3,\ x_3=5,$$

$$x_{n+3}=x_n-\frac{1}{x_{n+1}x_{n+2}} \text{ ja } n\ge1 \text{ un } x_{n+1}\ne0,\ x_{n+2}\ne0.$$

Pierādīt, ka kāds no šīs virknes locekļiem ir nulle.

98.35. Valstī ir *n* pilsētas. Starp katrām divām pilsētām uzbūvēts tieši viens ceļš, uz kura ieviesta vienvirziena kustība; ceļu krustpunktu ārpus pilsētām nav (izmantoti viadukti).

Pierādīt, ka eksistē tāda pilsēta, uz kuru var aizbraukt no jebkuras citas, braucot pa augstākais diviem ceļiem.

12. klase

98.36. Vai var vienlaicīgi izpildīties nevienādības

$$\begin{cases} \sin x > \sin y \\ \cos x > \cos y \\ \operatorname{tg} x > \operatorname{tg} y \\ \operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

98.37. Atrisināt vienādojumu

$$x + 3^x + \log_3 x = 31.$$

98.38. Kubs sastāv no $3 \times 3 \times 3$ vienādiem kubiņiem. Caur kuba centru perpendikulāri tā vienai diagonālei novilkta plakne.

Cik mazos kubiņus tā šķeļ ?

98.39. Vai eksistē tādi dažādi naturāli skaitļi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ka abas summas

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots \frac{1}{x_n} \quad \text{un}$$

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots \frac{1}{x_n+1}$$

ir veseli skaitļi ?

98.40. Daži no firmas darbiniekiem vienmēr melo, citi vienmēr runā patiesību. Nekādiem diviem darbiniekiem nav ne vienādas algas, ne vienādi atbildīgs darbs. Katrs firmas darbinieks apgalvo divas lietas:

a) " nav ne 10 darbinieku, kam būtu atbildīgāks darbs nekā man",

b) " vismaz 20 darbiniekiem ir lielāka alga nekā man".

Cik darbinieku strādā firmā?