Ī S I A T R I S I N Ā J U M I

5.1. Skat. piem., 1.zīm., kur skaitļi 1÷13 rakstīti "melnās" rūtiņās, bet skaitļi 14÷25 – "baltās".

1	14	2	15	3
16	4	17	5	18
6	19	7	20	8
21	9	22	10	23
11	24	12	25	13

1. zīm.

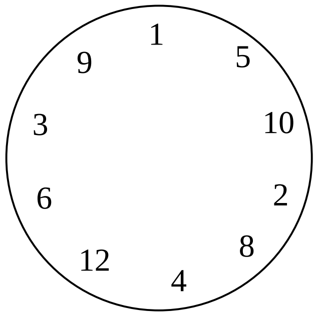
5.2. a) acīmredzami, jā (vidējā kokā).

b) nē. Kopējam pārvietošanos garumam pa kreisi jābūt vienādam ar kopējo pārvietošanos garumu pa labi; bet, savācoties jebkurā kokā, tie atšķirtos (tieši pārbauda visas iespējas).

5.3. Skat., piem., 2.zīm.

x	x			x	x		
		x	x			x	x
x	x			x	x		
		x	x			x	x
x	x			x	x		
		x	x			x	x
x	x			x	x		
		x	x			x	x

2. zīm.



3. zīm.

5.4. Skaitļi 7 un 11 var būt blakus tikai ar 1, tāpēc tie noteikti jāsvītro. Pārējo skaitļu izvietojumu skat. 3.zīm.

5.5. Izveidojam 30 pārus (1;60), (2;59), (3;58), ..., (30,31) un katrā grupā apvienojam 10 no šiem pāriem.

6.1. Skat., piem., 4.zīm.

125	126	125	124
124	125	126	125
125	124	125	126
126	125	124	125

4. zīm.

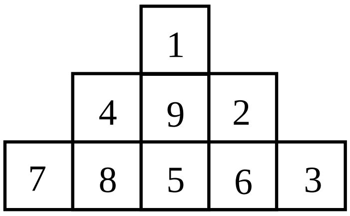
6.2. a) skaitlim var būt 5 cipari: $90209\cdot 11=992299$

b) Ievērojam, ka $11\cdot n=10n+n$. Tāpēc $\overline{ab..cd}\cdot 11=\overline{ab..cd0}+\overline{ab..cd}$. Ja nevienā vietā nerodas pārnesums, tad rezultātā ciparu summa ir 20+20=40; ja ir kaut viens pārnesums, tad tā ir mazāka.

Ja skaitlim $\overline{ab..cd}$ būtu 4 cipari (varbūt daži pirmie no tiem 0), tad vai nu $a+b\geq 10$, vai $c+d\geq 10$, un rodas pārnesums vai nu desmitu, vai tūkstošu šķirā.

6.3. Jā, var. Skat. 5.zīm.

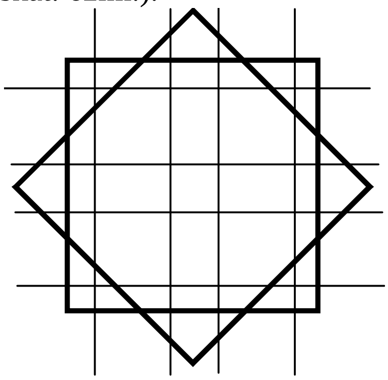
1	2	3
4	5	6
7	8	9



5. zīm.

6.4. Tā kā 5 vieglāko monētu summa 1+2+3+4+5=15 vienāda ar abu smagāko monētu summu 7+8=15, tad Jānis var nodemonstrēt Andrim šo vienādību, un Andrim jāatzīst, ka vienīgās uz svariem neuzliktās monētas masa var būt tikai 6 g.

6.5. a) pietiek ar 8 taisnēm (skat. 6zīm.).



6. zīm.

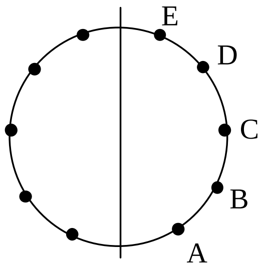
b) lai krustotu katru no 3 malām vienā mazajā trijstūrītī, to jākrusto ar vismaz 2 taisnēm; tātad rodas ≥4 krustošanās. Tātad kopā ir vismaz $4 \cdot 8=32$ krustošanās. Tā kā katra taisne katru kvadrātu var krustot augstākais 2 punktos, tad taišņu skaits ir vismaz $\frac{32}{4}=8$.

7.1. Piemērā x= -2; y= -1; z=1 negatīvu skaitļu nav. Piemērā x= -1; y=1; z=2 ir viens negatīvs skaitlis. Piemērā x=1, y=2; z=3 ir divi negatīvi skaitļi.

Pierādīsim, ka 3 negatīvi skaitļi nevar būt. Varam pieņemt, ka z – lielākais no skaitļiem x; y; z. Tad z jābūt negatīvam (jo z-x>0). Tad arī y ir negatīvs, jo y<z. Bet tad y(y-z)>0.

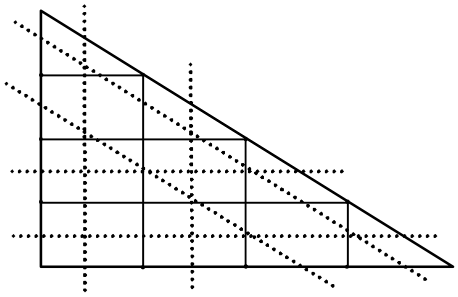
7.2. Nē, nevar. Pieņemsim, ka skaitļi tā izkārtoti. Tad "6" blakus ir četri skaitļi no kopas 1; 2; 3; 4; 5. Vienīgā iespēja, kad četru šo skaitļu summa dalās ar 6, ir, ja tie ir 1; 2; 4; 5. Tātad "3" atrodas "6" pretējā skaldnē. Skaitlim "5" blakus atrodas 3, 6 un divi no skaitļiem 1; 2; 4; tam jābūt blakus 2 un 4. Bet tad 4 ir blakus ar 3; 6; 5; 1 – pretruna.

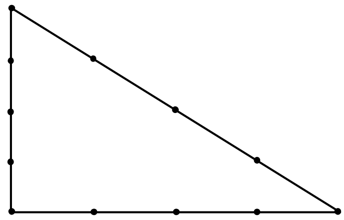
7.3. Sadalām cilvēkus divās "virknēs" pa pieciem (skat. 7.zīm.) Grupā pa labi izdarām secīgas maiņas AB; AC; AD; AE; BC; BD; BE; CD; CE; DE. Grupā pa kreisi rīkojamies līdzīgi.



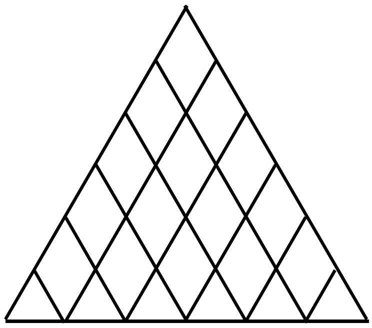
7. zīm.

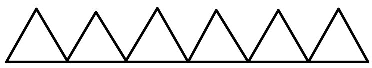
7.4. Pietiek ar 6 taisnēm (skat. 8.zīm.).
Ar mazāk taisnēm nepietiek, jo katra taisne var krustot augstākais divus no 12 nogriežņiem 9.zīm.

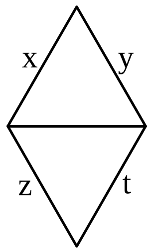

8. zīm.


9. zīm.

7.5. Ja divi trijstūrīši veido rombu (skat. 10.zīm.), tad malu x un y krāsas kopumā ir tādas pašas kā z un t krāsas kopumā. Tāpēc "izņemot" no augšas pa vienam no 11.zīm. redzamajiem rombiem, palikušās daļas kontūrā balto, sarkano un zaļo nogriežņu skaits nemainās. Bet, nonākot līdz 12.zīm. parādītajai situācijai, ir skaidrs, ka uz robežas ir vienāds skaits balto, sarkano un zaļo nogriežņu.


11. zīm.


12. zīm.



10. zīm.

8.1. Pierādāmā nevienādība pārveidojas par (a+b+c)(a-b)=a-b.

8.2. Nodzēšot skaitļus a un b un uzrakstot a-b (a>b), uz tāfeles esošo skaitļu summa samazinās par a+b-(a-b)=2b, tātad par pāra skaitli. Tā kā tā sākumā ir pāra skaitlis, tad tā nevar kļūt 1.

Skaitli 2 var sasniegt, piemēram, šādi:

(12, 6)→6, (10, 5)→5, (8, 4)→4, (6, 3)→3, (4, 2)→2; (2, 1)→1

(Tagad uz tāfeles ir 1; 3; 5; 7; 9; 11.)

(11, 9)→2, (7, 3)→4

(Tagad uz tāfeles ir 1; 2; 4; 5)

(5, 2)→3; (3, 1)→2; (4, 2)→2.

8.3. No katra kandidāta apgalvojumiem **izriet**, ka uzvarējis B. Tātad tas izriet arī no "godīgā" kandidāta apgalvojumiem; tātad B tiešām uzvarējis. Tā kā A, C, D to apgalvoja, tad melis ir B. Tātad C nav trešais un D nav ceturtais. Tāpēc ne A, ne D nav godīgais kandidāts. Tāpēc godīgais kandidāts ir C, un no viņa vārdiem seko, ka kandidātu secība ir B; D; A; C.

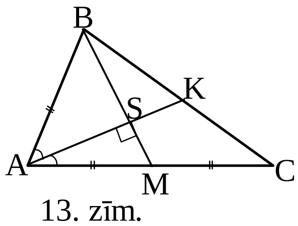
8.4. Tā kā leņķis starp mediānu un bisektrisi no virsotnes ir mazāks par šī virsotnes leņķa pusi, tad uzdevumā minētās mediāna un bisektrise neiziet no vienas virsotnes (skat. 13.zīm.).

Apzīmējam AM=MC=x. Tā kā trijstūrī BAM bisektrise AS ir arī augstums, tad AB=AM; tāpēc AB=x. Tagad šķirojam iespējas:

a) AB=30 cm. Tad AB+AC=3·30 cm=90 cm - pretruna.

b) AC=30 cm. Tad AM=15 cm, tad AB=15 cm, BC=90cm-15cm-30cm= =45cm=AB+AC - pretruna.

c) BC=30cm. Tad 3x=90cm-30cm=60cm, x=20cm; tāpēc AB=20cm, BC=30cm, AC=40cm.



13. zīm.

8.5. Apskatām 30 skaitļu pārus: (1, 60), (2, 59), (3, 58), ..., (30, 31). Visos tajos skaitļu summas ir vienādas. Izsvītrotie 20 skaitļi atrodas ne vairāk kā 20 pāros. Tātad ir vismaz 10 pāri, no kuriem skaitļi nav izsvītroti. Ņemam 10 no šiem pāriem; to apvienojums veido vienu grupu, bet visi palikušie skaitļi - otru.

9.1. No dotā seko, ka $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, tātad q>0. Tāpēc $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 2q < \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, no kurienes seko vajadzīgais.

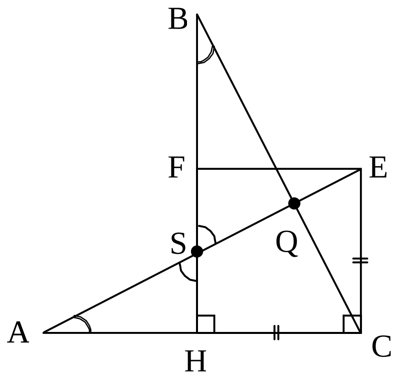
9.2. Vai nu *n*, vai *n+1* ir pāra skaitlis, tāpēc izteiksme dalās ar 2. Pārveidojot

$$n(n+1)(2n+1)=n(n+1)((n+2)+(n-1))=(n-1)n(n+1)+n(n+1)(n+2)$$

un ievērojot, ka no trim pēc kārtas ņemtiem veseliem skaitļiem viens dalās ar 3, iegūstam, ka izteiksme dalās ar 3.

9.3. Viegli pārbaudīt, ka $x^2+y^2+xy=(x+y)^2+y^2-(x+y)\cdot y$.

9.4. Pierādīsim, ka AE⊥BC. Tad līdzīgi CM⊥AB, un vajadzīgais seko no fakta, ka ABC augstumi krustojas vienā punktā. (Skat. 14.zīm.).



14. zīm.

No CE=HC un AC=BH seko, ka ΔACE=ΔBHC. Tāpēc ∠QBS=∠HAS. Arī ∠BSQ=∠ASH. Tāpēc ∠BQS=∠AHS=90°, k.b.j.

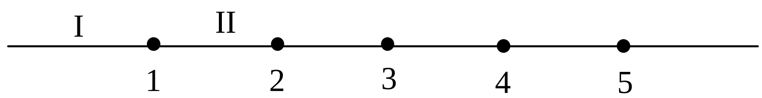
9.5. Apzīmēsim pāra (nepāra) kolonnās kopējo figūru skaitu ar PK (NK); līdzīgi ieviešam jēdzienus PR un NR. Skaidrs, ka PK, NK, PR, NR ir pāra skaitļi. Viegli pārbaudīt, ka uz melnajām rūtiņām esošo figūru skaits ir NK+PR-2·S, kur S – to figūru skaits, kas atrodas vienlaicīgi nepāra kolonnās un pāra rindiņās.

10.1. a) jā; piemēram, x=16 un y=12.

b) nē. Pārveidojam vienādojumu par $x(x-7)=y^2$. Redzam, ka y^2 dalās ar x. Tā kā x ir pirmskaitlis, tad y dalās ar x. Bet tad y≥x un $y^2 \geq x^2 > x^2-7x$; iegūta pretruna.

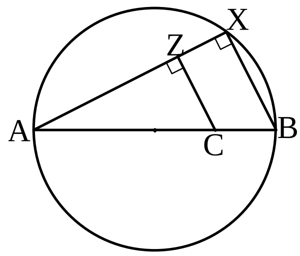
10.2. Ievērojam, ka |a-b| ir attālums starp skaitļu ass punktiem a un b.

Ja x pārbīdās pa labi par attālumu Δ, būdams apgabalā I, tad pirmais saskaitāmais samazinās par Δ, otrais – par 2Δ, ..., piektais – par 5Δ. Tātad summa samazinās.



Ja x pārbīdās pa labi par attālumu Δ, būdams apgabalā II, tad pirmais saskaitāmais palielinās par Δ, otrais samazinās par 2Δ, trešais samazinās par 3Δ utt. Tātad summa turpina samazināties. Līdzīgi turpinot, iegūstam, ka summa samazinās, līdz x sasniedz skaitļu ass punktu 4, un tālāk sāk palielināties. Tātad minimuma punkts ir x=4.

10.3. Novelkam CZ⊥AX un BX (skat. 15. zīm.). Tā kā AB – diametrs, tad $\angle AXB=90°$ un BX||CZ. Tā kā $\text{tg}\angle AXC=\frac{CZ}{XZ}$ un $\text{tg}\angle XAC=\frac{CZ}{AZ}$, tad $\frac{\text{tg}\angle AXC}{\text{tg}\angle XAC}=\frac{AZ}{ZX}=\frac{AC}{CB}$. Līdzīgi $\frac{\text{tg}\angle AYC}{\text{tg}\angle YAC}=\frac{AC}{CB}$.



15. zīm.

10.4. Kvadrāta laukums ir $\frac{1}{2}d^2$, bet i-tā taisnstūra laukums ir $\frac{1}{2}d_i^2\sin\varphi_i$, kur φ_i – leņķis starp tā diagonālēm. Tā kā kvadrāta laukums vienāds ar taisnstūru laukumu summu, tad

$\frac{1}{2}d^2=\frac{1}{2}d_1^2\sin\varphi_1+...+\frac{1}{2}d_n^2\sin\varphi_n\leq\frac{1}{2}d_1^2+\frac{1}{2}d_2^2+...+\frac{1}{2}d_n^2$, no kurienes seko vajadzīgais.

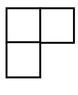
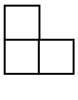
10.5.

1	■	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

16. zīm.

1	■	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1
2	1	3	2	1	3	2
3	2	1	3	2	1	3
1	3	2	1	3	2	1

17. zīm.

Izkrāsojam palikušās rūtiņas, kā redzams 16.zīm. Ir 17 krāsas "1", 15 krāsas "2" un 16 krāsas "3". Katra taisnā figūriņa satur pa vienai katras krāsas rūtiņai. Tāpēc "stūrītim" jāsatur divas rūtiņas krāsā "1" un viena krāsā "3". Tas iespējams tikai, ja "stūrītis ir stāvoklī  . Līdzīgi no 17.zīm. seko, ka "stūrītim" jābūt stāvoklī  . Iegūta pretruna.

11.1. Tā kā $A^2=A\cdot A$, tad katrs A dalītājs d ir izsakāms kā $d=d_1\cdot d_2$, kur d_1 ir A "pirmā eksemplāra " dalītājs un d_2 ir A "otrā eksemplāra" dalītājs. Tāpēc A^2 nekādi nevar būt vairāk par 10·10=100 dalītājiem. Tā kā, piemēram, skaitļa A^2 dalītājs A ir izsakāms gan kā 1·A, gan kā A·1, tad A^2 dalītāju skaits ir mazāks par 100.

11.2. Viegli redzēt, ka skaitļi 0; ±1; ±2; ...; ±2000 nav vienādojuma saknes. No dotā vienādojuma seko: ja *x* - tā sakne, tad

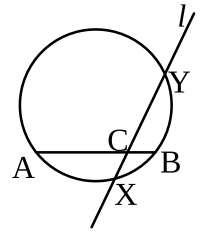
$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\cdot\left|\frac{x+2}{x-2}\right|\cdot\ldots\cdot\left|\frac{x+2000}{x-2000}\right|=1.$$

Pie $x>0$ katrs no šiem 2000 reizinātājiem ir lielāks par 1, pie $x<0$ - mazāks par 1. Uzdevums atrisināts.

11.3. Acīmredzami

$$XY=XC+CY=\sqrt{(XC-CY)^2+4XC\cdot CY}=\sqrt{(XC-CY)^2+4AC\cdot CB}$$

(skat. 18.zīm.). Tātad XY ir vismazākais, ja horda XY punktā C dalās uz pusēm. Tāpēc riņķa līnijas centrs atrodas AB vidusperpendikula krustpunktā ar perpendikulu, kas punktā C vilkts pret taisni *l*.



18. zīm.

11.4. Atrisinājumi, kuros x≠y, apvienojas pa pāriem (vienā pārī ir atrisinājumi, kas atšķiras tikai ar to, ka x un y vērtības tajos ir apmainītas vietām). Šos atrisinājumus atmetam. Paliek vienādojums $\frac{2}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{t}=1$. Līdzīgi atmetam atrisinājumus, kuros z≠u; paliek vienādojums $\frac{2}{x}+\frac{2}{z}+\frac{1}{t}=1$. Līdzīgi atmetam atrisinājumus, kuros x≠z; paliek vienādojums $\frac{4}{x}+\frac{1}{t}=1$. Tas pārveidojas par (x-4)(t-1)=4. Tam ir 3 (nepāra skaits!) atrisinājumi: (x-4=1, t-1=4), (x-4=2, t-1=2), (x-4=4, t-1=1). tātad arī sākotnējam vienādojumam ir nepāra skaits atrisinājumu naturālos skaitļos.

11.5. No dotā seko f(n)=f(f(f(n+2)+2))=f(n+2)+2, tātad f(n+2)=f(n)-2. Bez tam f(1)=f(f(0))=0. No nosacījumiem f(0)=1, f(1)=0, f(n+2)=f(n)-2 viegli seko, ka f(n)=1-n. Pārbaude parāda, ka šī funkcija der par uzdevuma atbildi.

12.1. Pie $x=\frac{\pi}{4}$ $|\sin x|=|\cos x|=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Visi trīs skaitļi nevar būt vienādi: ja $|\sin x|=|\cos x|$, tad no $\sin^2x+\cos^2x=1$ seko, ka $|\sin x|=|\cos x|=\frac{\sqrt{2}}{2}$, bet $|\sin 2x|=2|\sin x||\cos x|=1$.

12.2. a) Var: 3564·2=7128

b) Nevar. Ja tādi skaitļi x un y , x=2y, eksistētu, tad x+y=2y+y dalītos ar 3. Tā kā katrs skaitlis, dalot ar 3, dod tādu pašu atlikumu kā tā ciparu summa, tad summai 2+...+9 būtu jādalās ar 3, bet 2+...+9=44.

12.3. Tā kā $x+\frac{1}{x}\geq 2$ pozitīviem x, tad

$$(a+b+c)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 6.$$

No uzdevumā dotā seko, ka a+b+c<4. No šejienes izriet vajadzīgais.

12.4. Tā kā polinoms ir nepārtraukta funkcija, tad vai nu visiem reāliem x pastāv nevienādība f(x)>x, vai arī visiem reāliem x pastāv nevienādība f(x)<x. Pirmajā

gadījumā visiem reāliem x $f(f(f(x)))>f(f(x))>f(x)>x$, tātad $f(f(f(x)))>x$. Tātad x nav apskatāmā vienādojuma sakne. Otro gadījumu apskata līdzīgi.

12.5. Tas ir iespējams. Piekārtosim kubiņiem dabīgā veidā koordinātes (x; y; z), kur $x,y,z\in\{0; 1; 2; 3; 4\}$, un krāsosim baltus tos kubiņus, kam $x+y+z$ dalās ar 5 vai $x+y+z$ dod atlikumu 1, dalot ar 5; pārējos kubiņus krāsosim sarkanus.