5. klase

1. Kvadrāts sastāv no 5×5 rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 25 (katrā rūtiņā citu skaitli) tā, lai katrs skaitlis būtu vai nu lielāks par visiem blakus rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, vai arī mazāks par visiem blakus rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem? (Divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

2. Gar taisnu ceļu vienādos attālumos cits no cita aug koki. Sākotnēji katrā kokā sēž pa vienam putnam. Brīdi pa brīdim divi putni vienlaicīgi paceļas spārnos un aizlido pretējos virzienos, pie tam katrs no viņiem pārlido uz blakus koku. Vai visi putni var salasīties vienā kokā, ja koku skaits ir
   a) 7,
   b) 8?

3. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Parādiet, ka katru rūtiņu var izkrāsot baltu vai melnu tā, lai nekādas 3 pēc kārtas ņemtas rūtiņas ne horizontālā, ne vertikālā, ne diagonālā virzienā nebūtu vienā krāsā.

4. Apskatām naturālos skaitļus no 1 līdz 12. Izsvītrojiet no tiem dažus skaitļus un pārējos novietojiet pa apli tā, lai no katriem diviem blakus novietotiem skaitļiem viens dalītos ar otru. Kādu mazāko skaitļu daudzumu var izsvītrot?

5. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 60 var sadalīt 3 grupās pa 20 skaitļiem katrā tā, lai visās grupās skaitļu summas būtu vienādas?

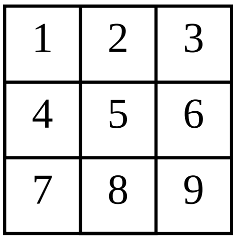
2000./2001. m. g. sagatavošanas olimpiāde matemātikā

6. klase

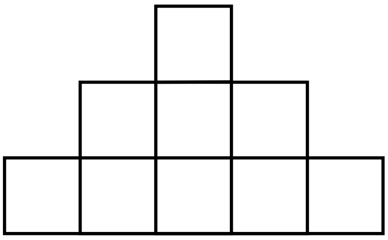
1. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Katrās divās rūtiņās, kurām ir kopīga mala, ierakstītie skaitļi atšķiras viens no otra par 1. Pierādiet, ka ierakstīto skaitļu summa var būt 2000.

2. Naturāla skaitļa *n* ciparu summa ir 20, bet skaitļa 11*n* ciparu summa ir 40.
   a) atrodiet kaut vienu tādu skaitli *n*,
   b) kāds ir mazākais iespējamais skaitļa *n* ciparu skaits?

3. Vai kvadrātiņus, kas attēloti 1. zīm., var pārvietot tā, lai tie veidotu 2. zīm. attēloto "piramīdu" un lai pie tam izpildītos sekojoša īpašība: katriem diviem kvadrātiņiem, kam 1. zīm. ir kopīga mala, 2. zīm. ir vismaz viena kopīga virsotne?

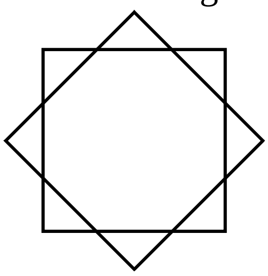


1. zīm.


2. zīm.

4. Gan Jānis, gan Andris zina, ka astoņas pēc ārējā izskata vienādas monētas sver attiecīgi 1 g, 2 g, 3 g, …, 8 g. Jānis zina, cik gramus sver katra monēta, bet Andris - nē. Kā Jānis var par vismaz vienu monētu pierādīt Andrim, cik gramus tā sver, lietojot vienu svēršanu uz sviras svariem bez atsvariem?

5. Divu kvadrātu kontūrām krustojoties, tās sadalās taisnes nogriežņos (skat. 3. zīm.) Ar kādu mazāko taišņu skaitu var krustot visus šos nogriežņus? Taisnes nedrīkst iet caur nogriežņu galapunktiem.


3. zīm.

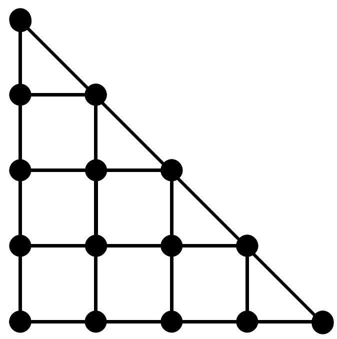
7. klase

1. Dots, ka x, y, z - trīs dažādi skaitļi. Cik daudzi no skaitļiem $x(x\text{-}y)$, $y(y\text{-}z)$, $z(z\text{-}x)$ var vienlaikus būt negatīvi?

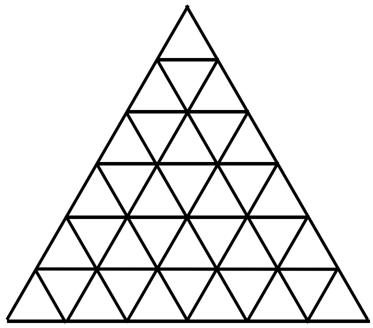
2. Vai uz kuba skaldnēm var uzrakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 6 (uz katras skaldnes - citu skaitli) tā, lai katrs skaitlis būtu visu savu kaimiņu summas dalītājs? (Divus skaitļus sauc par kaimiņiem, ja tie uzrakstīti uz skaldnēm ar kopīgu malu.)

3. Pa apli stāv 10 cilvēki. Katru minūti tieši viens pāris blakus esošu cilvēku var mainīties vietām. Parādiet, kā 20 minūtēs cilvēki var pārkārtoties aplī pretējā kārtībā.

4. Ar kādu mazāko taišņu skaitu var krustot visus 4. zīm. redzamos nogriežņus? Taisnes nedrīkst iet caur nogriežņu galapunktiem.



4. zīm.



5. zīm.

5. No 36 vienādiem maziem trijstūrīšiem salikts viens liels (skat. 5. zīm.) Katram mazajam trijstūrītim ir viena balta, viena sarkana un viena zaļa mala. Ja diviem trijstūrīšiem ir kopīga mala, tad abos šajos trijstūrīšos tā ir nokrāsota vienādi. Pierādiet, ka lielā trijstūra kontūrā ir vienāds skaits balto, sarkano un zaļo nogrieznīšu.

8. klase

1. Dots, ka $a+b+c=1$. Pierādīt, ka $a^2+ac+b=b^2+bc+a$.

2. Uz tāfeles uzrakstīti naturāli skaitļi no 1 līdz 12 ieskaitot, katrs tieši vienu reizi. Ar vienu gājienu atļauts nodzēst divus skaitļus un uzrakstīt uz tāfeles nodzēsto skaitļu starpību (no lielākā skaitļa atņemot mazāko), turklāt uz tāfeles nedrīkst vienlaikus atrasties divi vienādi skaitļi. Gājienus turpina, līdz uz tāfeles paliek viens skaitlis.
   a) parādiet, ka tas var būt 2,
   b) vai tas var būt 1?

3. Prezidenta vēlēšanās piedalījās kandidāti A, B, C, D. Vismaz viens no viņiem vienmēr melo, vismaz viens vienmēr runā patiesību. Pēc vēlēšanām, kurās visi kandidāti ieguva dažādu balsu skaitu, katrs no viņiem sniedza trīs atsevišķus paziņojumus.
   A: "B uzvarēja." "C bija otrais." "D bija pēdējais."
   B: "A bija otrais." "C bija trešais." "D bija pēdējais."
   C: "B uzvarēja." "D bija otrais." "A bija trešais."
   D: "B uzvarēja." "C bija trešais." "A bija pēdējais."
   Kādā kārtībā kandidāti sarindojās vēlēšanās?

4. Trijstūra perimetrs ir 90 cm, bet viena no tā malām ir 30 cm gara. Viena no trijstūra mediānām ir perpendikulāra vienai no tā bisektrisēm. Atrast trijstūra malu garumus.

5. Apskatām visus naturālos skaitļus no 1 līdz 60 ieskaitot. Jānis izsvītroja 20 skaitļus tā, ka to summa vienāda ar trešo daļu no visu skaitļu summas. Vai atlikušos 40 skaitļus noteikti var sadalīt 2 grupās pa 20 skaitļiem katrā tā, lai pirmās grupas visu skaitļu summa būtu vienāda ar otrās grupas visu skaitļu summu?

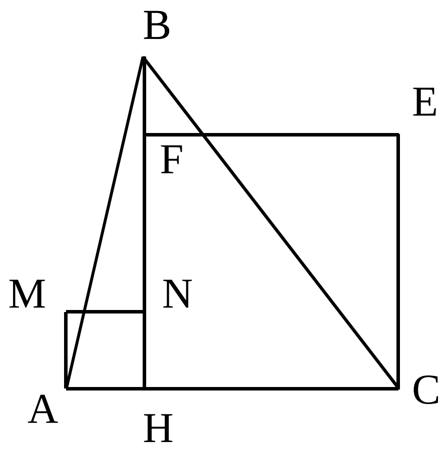
9. klase

1. Dots, ka kvadrātvienādojumam $x^2+px+q=0$ nav atrisinājuma reālos skaitļos. Pierādīt, ka arī kvadrātvienādojumam $x^2+px+2q=0$ nav atrisinājuma reālos skaitļos.

2. Pierādīt, ka katram naturālam n skaitlis $n(n+1)(2n+1)$ dalās ar 6.

3. Dots, ka eksistē tādi nenegatīvi veseli skaitļi x un y, ka $S=x^2+y^2+xy$. Pierādīt, ka eksistē tādi nenegatīvi veseli skaitļi u un v, ka $S=u^2+v^2-uv$.

4. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BH. Ir zināms, ka AC=BH un četrstūri AMNH un HCEF ir kvadrāti (skat. 6. zīm.) Pierādīt, ka taisnes AE, CM un BH krustojas vienā punktā.



6. zīm.

5. Uz šaha galdiņa novietotas dažas figūras, katrā luciņā ne vairāk par vienu. Gan katrā rindiņā gan katrā kolonnā atrodas nepāra skaits figūru. Pierādīt, ka uz melnajiem laucinīem kopā ir pāra skaits figūru.

10. klase

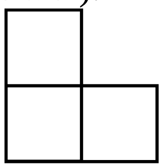
1. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka
   a) x^2-$7x$=y^2,
   b) x^2-$7x$=y^2 un x - pirmskaitlis?

2. Ar kādu x vērtību izteiksme
   $|x-1|+2|x-2|+3|x-3|+4|x-4|+5|x-5|$
   sasniedz savu mazāko vērtību?

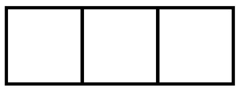
3. Uz riņķa līnijas diametra AB atzīmēts punkts C. Dots, ka X un Y - divi punkti uz riņķa līnijas, kas nesakrīt ne ar A, ne ar B. Pierādīt, ka $\frac{tg\angle AXC}{tg\angle XAC}=\frac{tg\angle AYC}{tg\angle YAC}$.

4. Kvadrāts ar diagonāles garumu d sagriezts n taisnstūros, kuru diagonāļu garumi ir d_1, d_2, …, d_n. Pierādīt, ka $d^2 \le d_1^{\ 2}+ d_2^{\ 2}+\ldots+ d_n^{\ 2}$.

5. Kvadrātā, kas sastāv no 7×7 rūtiņām, izgriezta augšējās malas otrā rūtiņa no kreisās puses. Pierādīt, ka atlikušo daļu nevar sagriezt gabalos tā, lai izveidotos 1 tāda figūra, kāda attēlota 7. zīm., un 15 tādas figūras, kādas attēlotas 8. zīm. (Figūras var būt novietotas arī citādi).



7. zīm.



8. zīm.

2000./2001. m. g. sagatavošanas olimpiāde matemātikā

11. klase

1. Naturālam skaitlim A ir tieši 10 dalītāju. Pierādīt, ka skaitlim A^2 ir mazāk par 100 dalītājiem. (Apskatām tikai tādus dalītājus, kas ir naturāli skaitļi.)

2. Pierādīt, ka vienādojumam
   $(x-1)(x-2)\ldots(x-1999)(x-2000)+(x+1)(x+2)\ldots(x+1999)(x+2000)=0$
   nav atrisinājumu reālos skaitļos.

3. Taisne *l* krusto nogriezni AB punktā C. Kā ar cirkuli un lineālu konstruēt centru riņķa līnijai, kas iet caur punktiem A un B un izšķeļ uz taisnes *l* hordu ar iespējami mazu garumu?

4. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{t}=1$ ir nepāra skaits atrisinājumu naturālos skaitļos. (Varam pieņemt par zināmu to, ka tam ir galīgs skaits atrisinājumu naturālos skaitļos.)

5. Kādas funkcijas $f(t)$ vienlaicīgi apmierina sekojošas īpašības:
   a) $f(t)$ definēta visiem veseliem skaitļiem, un tās vērtības ir veseli skaitļi
   b) $f(0)=1$,
   c) katram veselam n ir spēkā $f(f(n))=n$,
   d) katram veselam n ir spēkā $f(f(n+2)+2)=n$?

2000./2001. m. g. sagatavošanas olimpiāde matemātikā

12. klase

1. Kāds lielākais daudzums no skaitļiem $|\sin x|$, $|\cos x|$, $|\sin 2x|$ var būt vienādi savā starpā?

2. a) Vai no cipariem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 var sastādīt divus naturālus skaitļus tā, lai viens no tiem būtu 2 reizes lielāks par otru? Katru ciparu jālieto tieši vienu reizi.
   b) vai to pašu var izdarīt, izmantojot ciparus no 2 līdz 9 ieskaitot?

3. Trijstūris ar malu garumiem a, b, c atrodas tāda kvadrāta iekšpusē, kura malas garums ir 1. Pierādīt, ka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>2$.

4. Dots, ka $f(x)$ ir tāds polinoms, ka vienādojumam $f(x)=x$ nav atrisinājuma reālos skaitļos. Pierādīt, ka arī vienādojumam $f(f(f(x)))=x$ nav atrisinājuma reālos skaitļos.

5. Kubs sastāv no $5\times5\times5$ vienības kubiņiem; katrs kubiņš ir vai nu balts, vai sarkans. Vai iespējams, ka katrā taisnstūra paralēlskaldnī ar izmēriem $1\times1\times5$ ir 3 sarkani un 2 balti kubiņi?