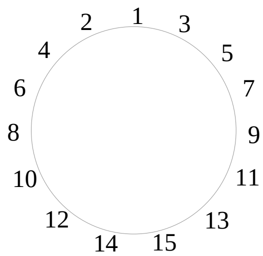
ĪSI ATRISINĀJUMI/ ATBILDES

5.1. Jā, var. Skat., piem., 5.zīm.



5. zīm.

	+	
•		•
A	•	

6. zīm.

5.2. Atbilde: nē, nevar.

Pierādījums. Blakus centrālajai rūtiņai jābūt tieši vienam krustiņam. Varam uzskatīt, ka situācija attēlota 6. zīm. ("•" nozīmē, ka krustiņa attiecīgajā rūtiņā nav). Līdz ar to ar A apzīmētajai rūtiņai uzdevuma nosacījumi neizpildās.

5.3. a) jā, var; skat., piem., 7. zīm.

b) nē, nevar, jo summa 1+2+...+12=78 nedalās ar 4.

1	2	11	12
10	8	5	3
4	6	7	9

7. zīm.

5.4. Pastāv $8\cdot2=16$ draudzības "zēns-meitene". Ja uz katru meiteni attiektos ne vairāk par 3 no tām, tad šādu draudzību skaits nepārsniegtu $5\cdot3=15$ – pretruna.

5.5. Atbilde: jā, var.

Pierādījums. Jānis uzdod jautājumus par četriem no 4 rūtiņām sastāvošiem kvadrātiem. Īsuma labad apzīmēsim šos jautājumus ar A, B, C, D atkarībā no tā, kuru no kvadrāta stūra rūtiņām attiecīgais jautājums "ietver" (skat. 8. zīm.). Tālāk Jānis spriež sekojoši:

1) rūtiņā A ierakstīts tas skaitlis, kas parādās tikai atbildē uz jautājumu A, bet neparādās atbildēs uz jautājumiem B, C, D (līdzīgi par B, C, D).

2) rūtiņā x ierakstīts tas skaitlis, kas parādās atbildēs uz jautājumiem A un B, bet neparādās atbildēs uz jautājumiem C un D (līdzīgi par rūtiņām y, t, u).

3) rūtiņā z ierakstīts atlikušais skaitlis.

A	**x**	**B**
y	**z**	**t**
D	**u**	**C**

8. zīm.

6.1. Pašreiz ir izdarīti 4219-1=4218 griezumi. Lai beigās iznāktu 10000 gabali, pavisam jāizdara 10000-1=9999 griezumi. Tātad vēl jāizdara 9999-4218=5781 griezumi.

6.2. Atbilde: 2004.

Risinājums. a) tā kā $\underbrace{2003!+2003!+\ldots+2003!}_{2004 \text{ reizes}} = 2004\cdot 2003! = 2004! \quad (*)$

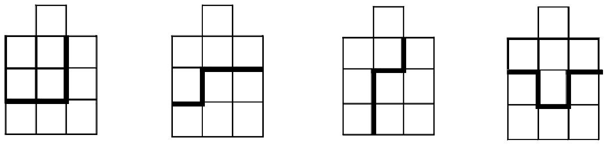
tad ar 2004 saskaitāmajiem pietiek.

b) ja kādu no saskaitāmajiem vienādībā $(*)$ aizstās ar mazāku, tad kreisās puses vērtība samazināsies, tāpēc būs jāpievieno vēl kāds saskaitāmais un to skaits augs. Tāpēc 2004 ir mazākais iespējamais saskaitāmo skaits.

6.3. Kopējais nosūtīto apsveikumu skaits ir pāra skaitlis, bet kopējais saņemto apsveikumu skaits – nepāra.

6.4. Tā kā $6\cdot4=24>23$, tad kāds no laupītājiem saņēma augstākais 3 monētas. Bet pat 3 smagākās monētas kopā sver tikai 300 g. Tāpēc atbilde ir "nē".

6.5. Jā, var. Skat. 9. zīm.



9. zīm.

7.1. Atverot iekavas, iegūstam vienādojumu

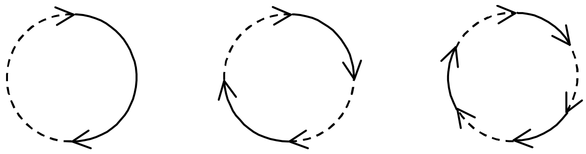
$$(1-2)+(3-4)+...+(2003-2004)+x=2005$$
$$(-1)\cdot 1002+x=2005$$
$$x=3007$$

7.2. Ja Andra atrisināto uzdevumu daudzumi minētajās nedēļās ir x; x+y; x+2y; x+3y; x+4y, tad kopējais atrisināto uzdevumu daudzums ir 5x+10y=5(x+2y).

a) 2004 nedalās ar 5, tāpēc tas nav iespējams;

b) ir iespējams; uzdevumu daudzums minētajās nedēļās var būt, piemēram, 399; 400; 401; 402; 403.

7.3. Skat., piem., 10. zīm.



10. zīm.

7.4. Drīkst būt ne vairāk kā viens skaitlis, kas dalās ar 3, un no katra pāra (1;2), (4;5), (7;8), ..., (2002;2003) arī drīkst būt ne vairāk kā viens skaitlis. Tātad kopējais skaits nevar pārsniegt $1+\frac{2004}{3}=669$. Šādu skaitļu daudzumu var sasniegt, piemēram, izvēloties skaitli 3 un visus tos skaitļus, kas, dalot ar 3, dod atlikumu 1 (t.i., skaitļus 1; 4; 7; ...; 2002).

7.5. To, ka X uzvarējusi pret Y, apzīmēsim ar X→Y; to, ka X un Y nospēlējušas neizšķirti, apzīmēsim ar X~Y; to, ka X nezaudēja pret Y, apzīmēsim ar $X \nleftarrow Y$.

Lemma. Nevienai komandai nav vairāk par 1 uzvaru un nav vairāk par 1 zaudējumu.

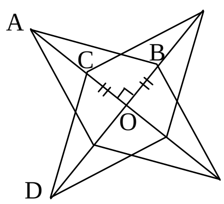
Pierādījums. Pieņemam, ka X→Y un X→Z. Vai nu $Y \nleftarrow Z$, vai $Z \nleftarrow Y$. Varam pieņemt, ka $Y \nleftarrow Z$. Tad $X \nleftarrow Y$ un $Y \nleftarrow Z$, tāpēc jābūt $Z \nleftarrow X$ – pretruna.

Lemmas otro daļu pierāda līdzīgi.

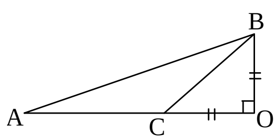
Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda: eksistē tādas komandas A un B, ka A→B. Ir vēl vismaz 3 citas komandas X, Y, Z. Saskaņā ar lemmu ne pret vienu no tām A nav uzvarējusi un augstākais pret vienu no tām A ir zaudējusi. Tāpēc ar vismaz divām no tām A spēlējusi neizšķirti. Varam pieņemt, ka A~X un A~Y. Tā kā $X \nleftarrow A$ un $A \nleftarrow B$, tad $B \nleftarrow X$; līdzīgi $B \nleftarrow Y$. Ar vismaz vienu no X un Y B nospēlēja neizšķirti; pieņemsim, ka B~X. Iegūstam $A \nleftarrow X$, $X \nleftarrow B$, B←A – pretruna ar uzdevuma nosacījumiem.

8.1. Nē, nevar. Novelkam abiem grafikiem paralēlas taisnes caur (0;0). Tās abas iet caur I un III kvadrantu, tātad divi leņķi starp tām ir šauri, divi – plati. Bet leņķi starp tām ir vienādi ar leņķiem starp doto funkciju grafikiem.

8.2. Nē, jo 2(x+y-z)+3(2x-3y+z)+(-8x+7y-z)=0.



11. zīm.



12. zīm.

8.3. Jā. Skat. 11.zīm., kur attēloti divi vienādi rombi ar kopīgu centru un šaurajiem leņķiem 45°; rombi pagriezti viens attiecībā pret otru par 90°.

Pierādīsim, ka AC=BC (skat. 12. zīm.). Tā kā $\angle BAO = \frac{1}{2}\cdot 45° = 22°30'$, tad $\angle ABO = 90° - 22°30' = 67°30'$. Tāpēc $\angle ABC = 67°30' - 45° = 22°30' = \angle BAC$. Tāpēc ΔABC - vienādsānu un AC=BC. Tātad C atrodas uz BC vidusperpendikula. Tā kā $CD \perp AB$, tad arī CD atrodas uz AB vidusperpendikula.

8.4. Sadalām kvadrātu četros mazākos kvadrātos ar izmēriem 2×2. Katrā no tiem ierakstīto skaitļu summa ir vai nu 1, vai 3. Tātad visai summai nevar būt citas vērtības kā 4·1+0·3=4; 3·1+1·3=6; 2·1+2·3=8; 1·1+3·3=10; 0·1+4·3=12. To, ka visas šīs summas iespējamas, skat. 13. zīm.

1	0	1	0
0	0	0	0
1	0	1	0
0	0	0	0

1	0	0	0
0	0	1	0
0	1	1	1
0	0	1	0

1	1	1	1
0	1	0	1
0	0	0	0
0	1	0	1

1	1	1	0
1	0	1	1
0	0	0	1
1	0	1	1

1	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1
1	0	1	0

13. zīm.

8.5. Ja iedomātie skaitļi ir x≥y≥z, tad xyz=2450 un x+y+z=2d, kur d – Dzintara vecums. Acīmredzot šai sistēmai ir vairāk nekā viens atrisinājums naturālos skaitļos (x, y, z), citādi Dzintars uzreiz varētu noskaidrot x, y, z vērtības. Pārbaudot visas iespējas, kā var rasties reizinājums x·y·z=2450, redzams, ka tikai divos gadījumos summai x+y+z ir vienāda (pāra) vērtība: (50; 7; 7) un (49; 10; 5). Tātad Dzintaram ir (50+7+7):2=32 gadi. Ja Andra vecums būtu mazāks par 50 gadiem, uzdevumam nebūtu atrisinājuma. Ja Andra vecums būtu lielāks par 50 gadiem, Andra otrais paziņojums nepalīdzētu Dzintaram izšķirties starp abām iespējām. Tātad Andrim ir 50 gadi (un iedomātie skaitļi ir 49; 10; 5).

9.1. Pārveidojam vienādojumu par $(16x^2+24x+9)(2x^2+3x+1)=9$

Apzīmējam $2x^2+3x+1=y$; iegūstam

$$(8y+1)\cdot y=9$$
$$8y^2+y-9=0,$$

no kurienes $y_1 = 1$; $y_2 = -\frac{9}{8}$.

No $2x^2+3x+1=1$ iegūstam $x_1=0$; $x_2=-\frac{3}{2}$.

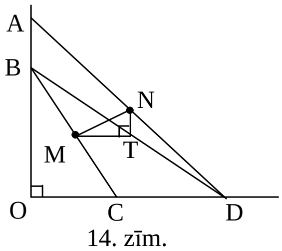
No $2x^2+3x+1=-\frac{9}{8}$ iegūstam

$$2x^2+3x+\frac{17}{8}=0$$
$$16x^2+24x+17=0.$$

Tā kā D<0, atrisinājuma nav.

9.2. Nē, jo pamīšus iegūst skaitļus, kas dalot ar 3, dod atlikumus 1 un 2, bet iegūstamais skaitlis dalās ar 3.

9.3. Ar T apzīmējam BD viduspunktu (skat. 14.zīm.). Tad no viduslīniju īpašībām $MN^2 = MT^2 + NT^2 = \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2$, tāpēc $MN = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$.



14. zīm.

9.4. Iedalām skolēnus 3 grupās:

1.grupa – tie, kam atnāca abi vecāki
2.grupa – tie, kam atnāca tikai māmiņa.
3.grupa – tie, kam atnāca tikai tētis.

Attiecīgos māmiņu (tētu) skaitus apzīmējam ar m_1, t_1, m_2, t_2, m_3, t_3. Tad $1 \le t_3 \le 2$, pie tam $t_3=1$ tad un tikai tad, ja 3. grupā ir brālis un māsa; $t_1=m_1$. Tā kā $t_1+t_2+t_3=18$ un $t_3 \ge 1$, tad $t_1 \le 17$. Pierādīsim, ka $t_1=17$. Tiešām, ja $t_1 \le 16$, tad arī $m_1 \le 16$. Tā kā $m_2 \le 3+4=7$, tad $m_1+m_2 \le 23$. Bet tā nevar būt, jo $m_1+m_2=24$. Tātad $t_1=17$; tātad arī $m_1=17$, $t_3=1$(jo $t_2=0$), $m_2=7$(jo $m_3=0$). Tātad 3. grupā ir brālis un māsa, un arī 1. grupā ir divi bērni no vienas ģimenes. Tātad uzdevuma atbilde – 4 bērni.

9.5. Viegli pārbaudīt, ka pozitīviem x un y pastāv nevienādība $\frac{2xy}{x+y} \le \frac{x+y}{2}$ (*) (nevienādība starp vidējo harmonisko un vidējo aritmētisko).

Pārveidojam pierādāmo nevienādību:

$$\left(a-\frac{ab}{a+b}\right)+\left(b-\frac{bc}{b+c}\right)+\left(c-\frac{ca}{c+a}\right) \ge \frac{1}{2}$$

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a} \le \frac{1}{2} \text{ (jo } a+b+c=1)$$

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a} \le 1$$

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a} \le \frac{a+b}{2}+\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}$$

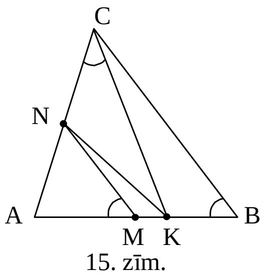
Šīs nevienādības pareizība ir acīmredzama saskaņā ar (*).

10.1. Jā, eksistē; piemēram, $y=-\frac{1}{2}|x+1|+\frac{1}{2}|x-1|+x$. (Var pierādīt, ka citu iespēju nav.)

10.2. Pārrakstām vienādojumu formā $\underbrace{999\ldots9}_{x}-3^y=6$.

Ja $x \ge 2$ un $y \ge 2$, tad kreisā puse dalās ar 9, bet labā – nē. Ja x=1, tad y=1, un otrādi. Tātad vienīgais atrisinājums ir x=y=1.

10.3. MN ir ΔBAC viduslīnija, tāpēc $\angle NMA=\angle NCK$. Tāpēc $\angle NCK+\angle NMK=180°$ un ap MNCK var apvilkt riņķa līniju. No tā seko, ka $\angle CNK=\angle CMK$ kā ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku. Prasītā līdzība seko pēc pazīmes (ll).



15. zīm.

10.4. Tā kā klucīša tilpums ir 8, tad n^3 jādalās ar 8, tātad n noteikti jābūt pāra skaitlim, n = 2k.

Pierādīsim, ka der tās un tikai tās pāra n vērtības, kuras dalās ar 4.

1. Ja n dalās ar 4, tad $n \times n \times n$ kubu var sadalīt fragmentos ar izmēriem $4 \times 4 \times 4$; katru no tiem, protams, var sadalīt klucīšos.

2. Ja n – pāra skaitlis, kas nedalās ar 4, tad sadalām $n \times n \times n$ kubu "kastītēs" ar izmēriem $2 \times 2 \times 2$ un izkrāsojam kastītes "šaha galdiņa kārtībā". Katrs klucītis satur 2 baltus un 2 melnus kubiņus, tāpēc, ja salikšana būtu iespējama, kopējam melno kubiņu skaitam jābūt vienādam ar kopējo balto kubiņu skaitu. Bet kastīšu skaits ir nepāra skaitlis, tāpēc tas nav iespējams.

10.5. Acīmredzot uz uzdevumā minēto efektu sportistu ātrumi neatstāj nekādu iespaidu. Tāpēc varam uzskatīt, ka tie visi ir vienādi. Tad pie katra karodziņa divi sportisti vienkārši maina celiņus, tāpēc **visu laiku** (tātad arī beigās) katrā celiņā ir pa vienam sportistam.

11.1. Ja $x \neq 0$ un $a \neq 0$, tad

$$\frac{x^4+x^2+1}{x^2} = x^2+\frac{1}{x^2}+1 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 - 1 = \frac{1-2a}{a^2}, \text{ tātad } \frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{a^2}{1-2a}.$$

Viegli pārbaudīt, ka šī atbilde der arī, ja $a = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

11.2. Ievērojam, ka

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \sqrt[3]{abc}+\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{a+b+c}{3}+\frac{1-a+1-b+1-c}{3} = 1$$

pēc nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko.

11.3. Viegli saprast, ka

$$(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot 3n = \frac{(3n)!}{n!} =$$

$$= 1\cdot 2\cdot\frac{3}{1}\cdot 4\cdot 5\cdot\frac{6}{2}\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n-1)\cdot\frac{3n}{n} =$$

$$= 1\cdot 2\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-2)(3n-1)\cdot 3^n.$$

Tāpēc atbilde ir: 2004.

11.4. Saskaņā ar leņķa bisektrises īpašību

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{SA}{SB},\quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{SB}{SC},\quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{SC}{SA}.$$

Tāpēc $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$ un prasītais seko no Čevas teorēmas.

11.5. Atbilde: tiem n, kas dalās ar 3.

a) ja n dalās ar 3, tad, nokrāsojot katra pamata virsotnes cikliski 3 krāsās tā, ka virsotnes uz katras sānu šķautnes nokrāsotas vienādi, iegūstam vajadzīgo krāsojumu.

b) pieņemsim, ka uzdevuma prasības izpildītas un ir s sarkanas virsotnes. Katra no tām ir 3 virsotņu "kaimiņš", un katrai no tām šie kaimiņi ir citi. Tātad pavisam 3s virsotnēm ir pa sarkanam kaimiņam. Tāpēc 2n = 3s, no kurienes seko, ka n dalās ar 3.

12.1. Ievietojot "x" vietā "-x", iegūstam vienādību $f(-x)+2f(x) = -x$. No sistēmas

$$\begin{cases} f(x)+2f(-x) = x \\ f(-x)+2f(x) = -x \end{cases}$$

viegli iegūstam $f(x) = -x$, $f(-x) = x$.

12.2. Atbilde: n=121.

Viegli pārbaudīt, ka n=1 un n=2 neder, tātad $n \geq 3$. Pēc Ņūtona binoma formulas iegūstam

$$9^n+2^n = (11-2)^n+2^n = 2^n+(-1)^n\cdot(2-11)^n =$$

$$= 2^n+(-1)^n\cdot\left(2^n - C_n^1\cdot 2^{n-1}\cdot 11 + C_n^2\cdot 2^{n-2}\cdot 11^2 + Q\cdot 11^3\right),$$

kur Q – vesels skaitlis. Tātad jānoskaidro, kādam mazākajam naturālam n izteiksme $2^n+(-1)^n\cdot\left(2^n - C_n^1\cdot 2^{n-1}\cdot 11 + C_n^2\cdot 2^{n-2}\cdot 11^2\right)$ dalās ar 11^3. Ja n – pāra skaitlis, tad šī izteiksme nedalās pat ar 11; tāpēc n – nepāra. Tad mums jāpēta izteiksme

$$C_n^2\cdot 2^{n-2}\cdot 11^2 - C_n^1\cdot 2^{n-1}\cdot 11 = n(n-1)\cdot 2^{n-3}\cdot 11^2 - n\cdot 2^{n-1}\cdot 11 =$$

$$= 11n\cdot\left[11\cdot 2^{n-3}\cdot(n-1) - 2^{n-1}\right]$$

Iekavas acīmredzot ar 11 nedalās, tātad n jādalās ar 11^2. Mazākā šāda vērtība (tā ir arī nepāra) ir n = 121.

12.3. Projekcija ir vai nu trijstūris, kura laukums nepārsniedz skaldnes laukumu (tas ir $\frac{\sqrt{3}}{4}$), vai arī četrstūris, kura diagonāļu garumi nepārsniedz 1 (tā laukums ir $\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi \le \frac{1}{2}$). Tā kā $\frac{\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}$, tad lielākais iespējamais laukums ir $\frac{1}{2}$; to iegūst, projicējot tetraedru plaknē, kas paralēla divām šķērsām šķautnēm.

12.4. Atbilde: 125 vektorus.

Risinājums: Ieviešam koordinātu sistēmu telpā tā, ka asis paralēlas kuba šķautnēm, bet vienības nogrieznis vienāds ar kuba šķautni. Katra šķautnes vektora katra komponente katras ass virzienā ir "-1" , "0" vai "+1", pie tam katru komponenti summas vektoram ietekmē 4 šķautņu vektori (katru komponenti – citi 4 šķautņu vektori). Tāpēc komponenšu skaitliskās vērtības var būt –4; -2; 0; 2; 4, t.i. tām var būt 5 dažādas vērtības. Tā kā komponenšu vērtības ir neatkarīgas viena no otras, tad varam iegūt 5·5·5=125 dažādus summas vektorus.

12.5. Viegli pārbaudīt, ka $x_1^2 + y_1^2 = 1$ un

$$x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (0{,}8x_n + 0{,}6y_n)^2 + (0{,}6x_n - 0{,}8y_n)^2 =$$
$$0{,}64x_n^2 + 0{,}96x_n y_n + 0{,}36y_n^2 + 0{,}36x_n^2 - 0{,}96x_n y_n + 0{,}64y_n^2 = x_n^2 + y_n^2.$$

Tāpēc visiem n ≥ 1 ir spēkā $x_n^2 + y_n^2 = 1$, no kurienes seko vajadzīgais.