# 5. klase

**1**. Vai var pa apli uzrakstīt visus naturālos skaitļus no 1 līdz 15, katru tieši vienu reizi, tā, lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 1, vai par 2?

**2**. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Sākumā tās visas ir tukšas. Vai var dažās rūtiņās iezīmēt pa krustiņam tā, lai blakus katrai rūtiņai (vienalga – tukšai vai tādai, kas satur krustiņu) būtu tieši viens krustiņš?

**3.** Taisnstūris sastāv no 3×4 rūtiņām. Vai rūtiņās var ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 12 (katru - tieši vienā rūtiņā) tā, lai

**a)** visās 3 rindās ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas?

**b)** visās 4 kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas?

**4.** Klasē ir 8 zēni un 5 meitenes. Katrs zēns draudzējas ar tieši 2 meitenēm. Pierādīt, ka ir tāda meitene, kas draudzējas ar vismaz 4 zēniem.

**5.** Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Andris rūtiņās ierakstījis naturālos skaitļus no 1 līdz 9 (katru skaitli tieši vienā rūtiņā). Jānis neredz ierakstītos skaitļus. Viņš ar vienu jautājumu var norādīt Andrim uz jebkuru kvadrātu, kas sastāv no 1 vai 4 rūtiņām, un uzzināt, kuri skaitļi ierakstīti šajā kvadrātā (bet ne to, kurš skaitlis kurā kvadrāta rūtiņā ierakstīts, ja runa ir par 4 rūtiņu kvadrātu.) Vai Jānis ar 4 jautājumiem var par visām rūtiņām uzzināt, kurš skaitlis kurā no tām ir ierakstīts?

# 6. klase

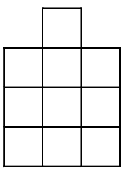
**1.** Aukla sākotnēji bija 10 km gara. To sagrieza 2m, 3m un 5m gabalos tā, ka kopā sanāca 4219 gabali. Šos gabalus tālāk sagriezīs 1m garos gabalos. Cik griezumus vēl vajadzēs izdarīt?

**2.** Par naturāla skaitļa n faktoriālu sauc visu naturālo skaitļu reizinājumu no 1 līdz n ieskaitot (to apzīmē ar n!). Piemēram, $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$; $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$; $1!=1$. Kāds ir mazākais daudzums faktoriālu, kuru summa var būt 2004! ? (Starp šiem faktoriāliem drīkst būt vienādi, un to skaitam jābūt lielākam par 1.)

**3.** Klasē ir 31 skolēns. Katrs no viņiem nosūtīja apsveikumu vai nu 2 vai 4, vai 10 klases biedriem. Katrs saņēma tieši 5 apsveikumus. Pierādīt, ka kāds apsveikums mērķi nesasniedza.

**4.** Seši laupītāji dala 23 zelta monētas. To masas ir 79g, 80g, 81g, ..., 100g, 101g. Vai var gadīties, ka katrs saņem vismaz 301 gramu zelta? (Monētas nedrīkst lauzt gabalos, pārkausēt utml.)

**5.** Andris, Dzintars, Juliata un Gunārs katrs sadalīja 1. zīm. redzamo figūru 2 gabalos tā, ka katrs gabals sastāv no 5 rūtiņām. Vai var gadīties, ka starp iegūtajiem gabaliem var atrast 6 dažādus? (Ja divi gabali atšķiras tikai ar novietojumu plaknē vai ir viens otra spoguļattēli, tad tos uzskata par vienādiem.)



1.zīm.

# 7. klase

**1.** Atrisināt vienādojumu

$$1-(2-(3-(4-(5-\ldots-(2003-(2004-x\underbrace{)\ldots)}_{\substack{2003\\ \text{iekavas}}}=2005$$

**2.** Gatavojoties olimpiādei, Andris 5 nedēļas risināja uzdevumus. Katru nākošo nedēļu viņš izrēķināja par vienu un to pašu uzdevumu skaitu vairāk nekā iepriekšējā nedēļā. Vai var gadīties, ka Andris pavisam kopā izrēķināja
**a)** 2004 uzdevumus, **b)** 2005 uzdevumus?

**3.** Andris, Dzintars un Gunārs katrs sadalīja vienu un to pašu riņķa līniju 2 vienādās daļās. Vai var gadīties, ka Andra daļas atšķiras no Dzintara daļām, Dzintara daļas – no Gunāra daļām un Gunāra daļas – no Andra daļām? Vai līdzīga situācija varētu rasties, ja dalīšanā piedalītos 2004 zēni?

**4.** Kādu lielāko daudzumu naturālo skaitļu no 1 līdz 2004 var izvēlēties tā, lai nekādu divu izvēlēto skaitļu summa nedalītos ar 3?

**5.** Futbola turnīrā piedalījās vismaz 5 komandas; katra ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi. Jebkurām 3 komandām A, B, C ir spēkā sekojošais: ja A nezaudēja pret B un B nezaudēja pret C, tad C nezaudēja pret A.
Pierādiet, ka visas spēles turnīrā beidzās neizšķirti.

# 8. klase

**1.** Vai divu lineāru funkciju $y=k_1x+a_1$ un $y=k_2x+a_2$ grafiki var veidot taisnu leņķi viens ar otru, ja $k_1>0$ un $k_2>0$ ?

**2.** Vai visi skaitļi $x+y-z$, $2x-3y+z$ un $-8x+7y-z$ var vienlaicīgi būt pozitīvi?

**3.** Vai eksistē 2 izliekti četrstūri, katram no kuriem katra mala atrodas uz kādas otrā četrstūra malas vidusperpendikula?

**4.** Tabula sastāv no 4×4 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts 1 vai 0, pie tam katrā 2×2 rūtiņu kvadrātā trīs skaitļi savā starpā vienādi, bet ceturtais no tiem atšķiras.

Kāda var būt visu tabulā ierakstīto skaitļu summa?

**5.** Sarunājas Andris un Dzintars. Andris saka: “Es esmu iedomājies 3 naturālus skaitļus (starp tiem var būt arī vienādi). To reizinājums ir 2450, bet summa divreiz lielāka par Tavu vecumu.” Dzintars padomājis atbild: “Es nezinu un nevaru zināt, kādus skaitļus Tu esi iedomājies.” Andris turpina: “Mans vecums ir lielāks nekā jebkurš no iedomātajiem skaitļiem.” Dzintars atbild (viņš zina, cik gadu ir Andrim): “Tagad es zinu, kādus skaitļus Tu esi iedomājies.”

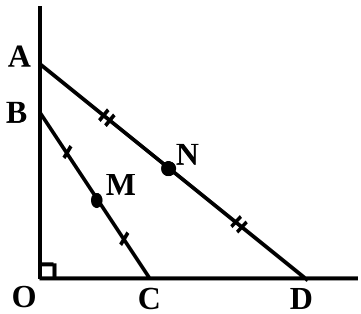
Cik vecs ir Dzintars, cik – Andris? (Vecumu mēra veselos gados.)

# 9. klase

**1**. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $(4x+3)^2(2x+1)(x+1)=9$.

**2**. No sākuma uz tāfeles uzrakstīts skaitlis 2. Ar 1., 3., 5., ... gājieniem uz tāfeles uzrakstītajam skaitlim pieskaita vai nu 2, vai 5; ar 2., 4,. 6., ... gājieniem uz tāfeles uzrakstīto skaitli reizina vai nu ar 2, vai ar 5. Vai iespējams iegūt skaitli 200420042004?

**3.** Dots, ka $\angle AOD = 90°$, AB=x, CD=y, M-BC viduspunkts, N-AD viduspunkts. Izteikt MN ar x un y (skat. 2. zīm.).




**2.zīm.**

**4.** Uz klases vecāku sapulci atnāca 18 tēti un 24 māmiņas, pie tam katram bērnam ieradās vismaz viens no vecākiem. Tieši 10 zēniem un 8 meitenēm atnāca abi vecāki, tieši 4 zēniem un 3 meitenēm – tikai māmiņa, tieši 1 zēnam un 1 meitenei – tikai tētis.

Cik klasē ir tādu bērnu, kam šajā pašā klasē mācās vai nu brālis, vai māsa?

**5.** Dots, ka $a>0$, $b>0$, $c>0$ un $a+b+c=1$.

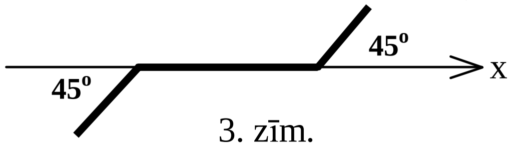
Pierādīt, ka $$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}$$

## 10. klase

**1**. Vai eksistē tādi skaitļi *a*, *b*, *c*, *d*, ka 3. zīm. attēlots funkcijas

$$y=a|x+1|+b|x-1|+cx+d$$

grafiks? (Ordinātu ass atrašanās vieta nav noteikta.)




3. zīm.

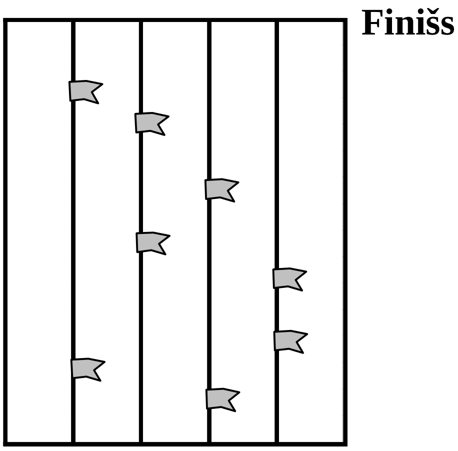
**2**. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu:

$$10^x - 3^y = 7$$

**3.** Trijstūrī ABC punkts M ir malas AB viduspunkts, punkts N ir malas AC viduspunkts. Uz nogriežņa MB ņemts tāds punkts K, ka ∠ACK=∠MBC. Pierādīt, ka trijstūri KNC un BMC līdzīgi savā starpā.

**4.** Kādiem naturāliem *n* kubu ar izmēriem n×n×n var salikt no klucīšiem ar izmēriem 1×2×4?

**5.** Profesors Cipariņš izdomājis jaunu barjerskriešanas disciplīnu. Sacensības notiek n paralēlos celiņos. Dažās vietās uz robežas starp blakus esošiem celiņiem atrodas karodziņi; visi karodziņi ir dažādos attālumos no starta līnijas. Aizskrienot līdz karodziņiem, sportists sāniski pārlec tam pāri un turpina skriet pa jauno celiņu. (Piemēram, 4. zīm. ir 5 celiņi un 8 karodziņi.) Pierādīt: ja katrā celiņā startē viens sportists, tad katrā celiņā arī finišē viens sportists.




4. zīm.

# 11. klase

**1**. Dots, ka $\dfrac{x}{x^2+x+1}=a$. Izteikt $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ ar $a$ palīdzību kā racionālu daļu.

**2**. Dots, ka $0 < a, b, c < 1$. Pierādīt, ka

$$\sqrt{abc}+\sqrt{(1-a)(1-b)(1-c)}<1$$

**3.** Kādam mazākajam naturālajam $n$ skaitlis

$$(n+1)(n+2)(n+3)...(3n-1)(3n)$$

dalās ar $3^{2004}$?

**4.** Trijstūra piramīdas SABC sānu skaldnēm novilktas bisektrises skaldņu leņķos, kas atrodas pie virsotnes S. Tās krusto malas AB, BC, CA attiecīgi punktos $C_1$, $A_1$, $B_1$.

Pierādīt, ka taisnes $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ krustojas vienā punktā.

**5.** Katra no $n$-stūra prizmas virsotnēm jānokrāso balta, sarkana vai zaļa. Jāpanāk, lai katrai virsotnei A tās trīs kaimiņi (t.i. virsotnes, kas savienotas ar A ar šķautni) būtu nokrāsotas dažādās krāsās. Kādiem $n$ tas iespējams?

## 12. klase

**1**. Funkcija *f(x)* definēta visiem reāliem skaitļiem *x*, pieņem reālas vērtības un katram reālam *x* apmierina sakarību

$$f(x)+2f(-x)=x$$

Atrast visas šādas funkcijas f un pierādīt, ka citu bez atrastajām nav.

**2**. Kādam mazākajam naturālam *n* skaitlis $9^n+2^n$ dalās ar $11^3$?

**3.** Regulārā tetraedrā katras šķautnes garums ir 1. Projicējam šo tetraedru patvaļīgā plaknē. Kāds ir lielākais iespējamais projekcijas laukums?

**4.** Katrai kuba šķautnei izvēloties virzienu, tā pārvēršas par vektoru; atrodam visu šo 12 vektoru summu.

Cik dažādus summas vektorus var iegūt?

**5.** Skaitļu virknes $x_1, x_2, x_3, \ldots$ un $y_1, y_2, y_3, \ldots$ veido sekojoši:

$$x_1=\frac{12}{13},\ y_1=\frac{5}{13};\ \text{pie } n\geq 1\ \ x_{n+1}=0{,}8x_n+0{,}6y_n,\ \ y_{n+1}=0{,}6x_n-0{,}8y_n.$$

Pierādīt, ka $|x_{2004}|\leq 1$.