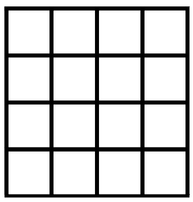
5. klase

1. Rindā uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 1000 ieskaitot, katrs tieši vienu reizi. Vai vairāk uzrakstīts pāra ciparu vai nepāra ciparu?

2. Naturālam trīsciparu skaitlim pirmo ciparu palielināja par 3, otro - par 2, trešo - par 1. Ieguva trīsciparu skaitli, kas 4 reizes lielāks par sākotnējo. Atrast sākotnējo skaitli.

3. Naturālā desmitciparu skaitlī vienādus ciparus aizstāja ar vienādiem burtiem, bet dažādus - ar dažādiem; ieguva pierakstu KRIZANTĒMA. Zināms, ka šis skaitlis dalās ar 18. Kāds cipars aizstāts ar burtu A?

4. Kvadrātisks režģis sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām; rūtiņas malas garums ir 1 (skat. 1.zīm.). Šis režģis jāpārkrāso sarkans, krāsojot vai nu rūtiņu kontūras, vai "kāsīšus" (skat. 2.zīm.): kāsītis sastāv no 2 nogriežņiem ar garumu 1 un var būt arī pagriezts citādi. Krāsas pietiek, lai nokrāsotu līnijas ar kopējo garumu 40. Pierādīt, ka jākrāso vismaz 8 kāsīši.


1. zīm.


2. zīm.

5. Kuba virsotnēs jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 8, katrs tieši vienu reizi. Pie tam nepieciešams, lai visās skaldnēs ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas savā starpā.

a) Pierādīt, ka šīs summas var būt 18.
b) Vai tās var būt citādas?

6. klase

1. Vai kvadrātu, kas sastāv no 7×7 rūtiņām, var sagriezt kvadrātos, kuru izmēri ir 2×2 rūtiņas un 3×3 rūtiņas?

2. Krūzē ir tīra kafija un piens vienādās daļās. Profesors Cipariņš nodzēra no tās vienu malku un piepildīja krūzi atkal pilnu, pielejot pienu. Pēc tam viņš nodzēra vēl vienu malku un piepildīja krūzi atkal pilnu, pielejot tīru kafiju. Vai tagad krūzē ir vairāk kafijas vai piena? (Abi malki saturēja vienādus daudzumus dzēriena.)

3. Kvadrāts sastāv no 4×4 rūtiņām. Tajās jāieraksta naturāli nepāra skaitļi 1; 3; 5; …; 29; 31 (katrs tieši vienu reizi) tā, lai visos kvadrātos, kas sastāv no 3×3 rūtiņām, ierakstīto skaitļu reizinājumi būtu vienādi. Vai to var izdarīt?

4. Kādā klasē katrs zēns vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Visi zēni ir dažāda auguma. Šorīt katrs no viņiem izteica divus apgalvojumus:

"Neviens zēns klasē nav īsāks par mani.",
"Klasē ir vairāk nekā 10 zēnu, kas garāki par mani."

Cik klasē ir zēnu, un cik no viņiem ir meļi?

5. Klasē ir 34 skolēni. Visi sēž 17 divvietīgos solos. Ir zināms, ka tieši puse meiteņu sēž kopā ar zēniem. Pierādīt, ka skolēnus nevar pārsēdināt tā, lai tieši puse zēnu sēdētu kopā ar meitenēm.

7. klase

1. Dots, ka a, b, c - dažādi pozitīvi skaitļi. Vai var eksistēt tāds skaitlis x, ka vienlaicīgi pastāv vienādības $ax + b = c$, $bx + c = a$ un $cx + a = b$?

2. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Rūtiņās jāieraksta naturāli skaitļi no 1 līdz 9, katrs tieši vienu reizi.

a) Vai to var izdarīt tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu nepāra skaitlis?

b) Vai to var izdarīt tā, lai katrā rindiņā un katrā kolonnā ierakstīto skaitļu summa būtu pāra skaitlis?

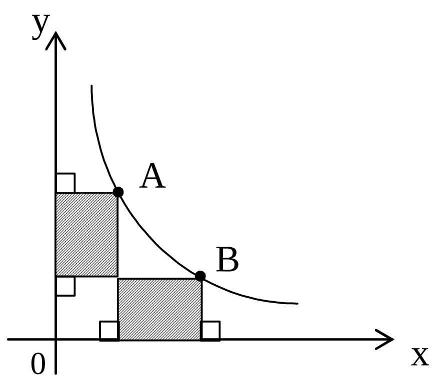
3. Andris uzrakstīja piecciparu skaitli, izsvītroja no tā vienu ciparu un iegūto četrciparu skaitli saskaitīja ar sākotnējo. Rezultātā viņš ieguva summu 38207. Kādu skaitli Andris uzrakstīja sākumā?

4. Kvadrāts sastāv no 9×9 rūtiņām. Tajā atzīmētas 9 rūtiņas tā, ka katrā rindā un katrā kolonnā atzīmēta tieši viena rūtiņa. Pierādīt: katrā 5×5 rūtiņu kvadrātā ir vismaz viena atzīmēta rūtiņa.

5. Plaknē uzzīmēti 6 nogriežņi. Nekādi divi no tiem neatrodas uz vienas taisnes un nekādiem diviem nav kopēja galapunkta. Dzintars atzīmēja visus nogriežņu krustpunktus; izrādījās, ka katrs atzīmētais punkts pieder tieši 2 nogriežņiem. Uz viena nogriežņa atzīmēti 3 punkti, uz otra - 4 punkti, uz trim citiem - pa 5 punktiem. Cik punktu atzīmēti uz sestā nogriežņa?

8. klase

1. Uz sakarības $y = \frac{1}{x}$ grafika ņemti 2 punkti A un B un no tiem novilkti perpendikuli pret koordinātu asīm (sk. 3.zīm.) Pierādīt, ka iesvītroto četrstūru laukumi ir vienādi.



3. zīm.

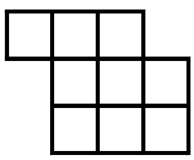
2. Vai eksistē 100 dažādi veseli skaitļi, kuru summa vienāda ar to reizinājumu?

3. Trijstūra MNK malas vienādas ar trijstūra ABC mediānām (katra mala - ar citu mediānu). Vai trijstūri MNK un ABC var būt vienādi savā starpā?

4. Ar LKD (x,y) apzīmēsim divu naturālu skaitļu x un y lielāko kopīgo dalītāju. Vai var vienlaicīgi pastāvēt sakarības

LKD (x, y) = 52; LKD (x, z) = 54; LKD (y, z) = 56?

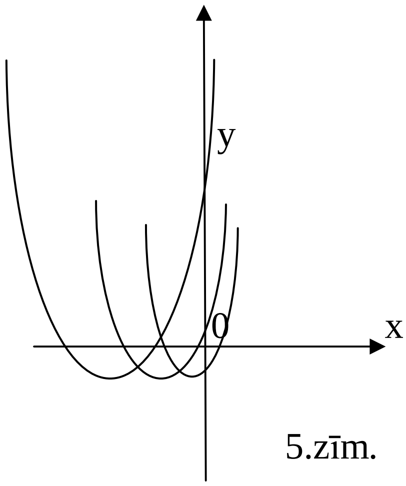
5. Kvadrāts sastāv no 11×11 rūtiņām. Tajā iezīmētas 28 tādas figūras, kāda parādīta 4. zīm. (figūras var būt arī pagrieztas vai apgrieztas otrādi). Pierādīt: ir tāda rūtiņa, kas pieder vismaz a) trim, b) četrām iezīmētajām figūrām.



4. zīm.

9. klase

1. Uz koordinātu asīm nav uzrādīti mērogi. Vai var gadīties, ka 5.zīm. attēloti funkciju $y=ax^2+bx+c$, $y=bx^2+cx+a$ un $y=cx^2+ax+b$ grafiki?



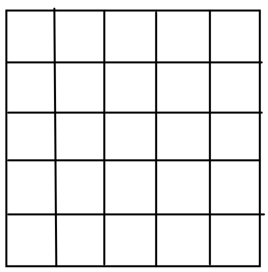
5.zīm.

2. Pierādīt: trijstūra ABC tā ārējā leņķa bisektrise, kas atrodas pie virsotnes B, krusto apvilkto riņķa līniju loka $\cup ABC$ viduspunktā (zināms, ka $AB \neq BC$).

3. Dots, ka p – pirmskaitlis. Pierādīt, ka p^4-1 dalās vai nu ar 15, vai ar 16.

4. Riņķa līnija ar rādiusu R pieskaras ΔABC malām AB un BC, bet tās centrs atrodas uz malas AC. Pierādīt, ka $R<2r$, kur r - ΔABC ievilktās riņķa līnijas rādiuss.

5. Kvadrātisks režģis sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām (skat. 6.zīm.). Ar vienu gājienu var nokrāsot sarkanā krāsā jebkura viena kvadrāta kontūru. Ar kādu mazāko gājienu skaitu var nokrāsot sarkanas visas režģa līnijas?



6.zīm.

10. klase

1. Dots, ka a>0 un b>0. Pierādīt: taisne, kuras vienādojums ir $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, atšķeļ no koordinātu asu „pozitīvajiem" stariem $\overrightarrow{0x}$ un $\overrightarrow{0y}$ nogriežņus, kuru garumi ir attiecīgi a un b.

2. Vai eksistē tādi racionāli skaitļi x un y, ka vienlaicīgi $x \neq 0$, $y \neq 0$ un $x^2+y^2=13xy$?

3. Uz taisnes t atlikti punkti A_1, A_2, A_3, A_4 (tieši šādā secībā); punkts B nepieder taisnei t. Ar R_{ij} apzīmēsim tās riņķa līnijas rādiusu, kas apvilkta ap trijstūri BA_iA_j ($i \neq j$; $1 \leq i$, $j \leq 4$). Pierādīt, ka

$$R_{12} \cdot R_{34} = R_{13} \cdot R_{24}.$$

4. Dots, ka a, b, c – pozitīvi skaitļi un abc=1. Pierādīt, ka $a^2+b^2+c^2 \geq a+1+\frac{1}{a}$.

5. Klasē ir 6 aktīvisti. Katri divi aktīvisti veido tieši vienu komisiju. Atrast mazāko skaitli n ar īpašību: no jebkurām n komisijām var izvēlēties 3 tādas komisijas, kas kopā satur visus 6 aktīvistus.

11. klase

1. Divas paralēlas taisnes krusto funkcijas $y=x^2$ grafiku: viena taisne - punktos A un B, otra taisne – punktos C un D. Pierādīt: taisne, kas iet caur nogriežņu AB un CD viduspunktiem, paralēla 0y asij.

2. Klasē ir 5 aktīvisti. Viņi izveidojuši vairākas komisijas. Katrā komisijā ir vismaz viens loceklis, un nekādas divas komisijas sastāva ziņā nesakrīt. Bez tam katrām divām komisijām ir vismaz viens kopējs loceklis. Kāds lielākais komisiju skaits var būt izveidots?

3. Riņķa līnijas W_1 un W_2 krustojas punktos A un B. Riņķa līnijas W_1 pieskare, kas novilkta punktā A, krusto W_2 vēl punktā C; riņķa līnijas W_2 pieskare, kas novilkta punktā B, krusto W_1 vēl punktā D. Pierādīt, ka AD||BC.

4. Dots, ka $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ir šauri leņķi un $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 90^0$.

Pierādīt, ka

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\beta + \gamma) \cdot \sin(\gamma + \delta) \cdot \sin(\delta + \alpha) > 4\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \sin\delta .$$

5. Vai eksistē 8-ciparu naturāls skaitlis M ar īpašību:

ja n- patvaļīgs piecciparu naturāls skaitlis, tad M ciparus var pārkārtot tādā secībā, lai iegūtais 8-ciparu skaitlis M_1 dalītos ar n? (Skaitlis M_1 var sākties arī ar vienu vai vairākām nullēm.)

12. klase

1. Dots, ka a, b, c – reāli skaitļi un |a-b|<c<a+b. Vai noteikti |a-c|<b<a+c?

2. Vai eksistē tādi naturāli skaitļi x un y, ka abi skaitļi $7^x \cdot 2^y - 1$ un $7^x \cdot 2^y + 1$ ir pirmskaitļi ?

3. Dots, ka ABCDE ir izliekts piecstūris, pie tam AB||CE, BC||AD, CD||BE un AE||BD. Nogriežņi AC un BE krustojas punktā D_1, bet nogriežņi AD un BE krustojas punktā C_1. Pierādīt, ka $BD_1=C_1E$.

4. Kādiem naturāliem n eksistē polinoms P(t) ar īpašību:

$P\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^n - \frac{1}{x^n}$ visiem reāliem $x \neq 0$?

5. Futbola turnīrā piedalījās 28 komandas, katra ar katru citu spēlēja tieši vienu reizi. Par uzvaru komanda iegūst 2 punktus, par neizšķirtu – 1 punktu, par zaudējumu – 0 punktus. Vairāk nekā 75% spēļu beidzās neizšķirti. Pierādīt: vismaz divām komandām turnīra noslēgumā bija vienāds punktu skaits.