2006./2007.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā uzdevumi

5. klase

1. Kvadrāts sastāv no 4x4 rūtiņām. Vai var dažas rūtiņas nokrāsot melnas un pārējās - baltas tā, lai katrai melnai rūtiņai būtu tieši 3 baltas blakus rūtiņas, bet katrai baltai rūtiņai – tieši 1 melna blakus rūtiņa? (Divas rūtiņas sauc par blakus rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

2. Piecu veselu skaitļu summa ir 2006. Vai to reizinājums var būt 200620062007?

3. Vai var aizstāt vienādus burtus ar vienādiem cipariem, bet dažādus – ar dažādiem tā, lai iegūtu pareizu saskaitīšanas piemēru

$$\begin{array}{r} \text{DIVI} \\ +\ \ \text{DIVI} \\ \hline \text{PIECI} \end{array} \quad ?$$

4. Pilnīgi tumšā istabā uz galda atrodas 10 monētas. Divas no tām ir ar ciparu uz augšu, pārējās – ar ģerboni uz augšu. Andris grib sadalīt monētas divās kaudzītēs tā, lai abās būtu vienāds daudzums monētu ar ciparu uz augšu (varbūt neviena). Kā to panākt? (Dažas monētas drīkst apgriezt otrādi. Ieslēgt gaismu vai atšķirt monētu puses pēc taustes nav iespējams.)

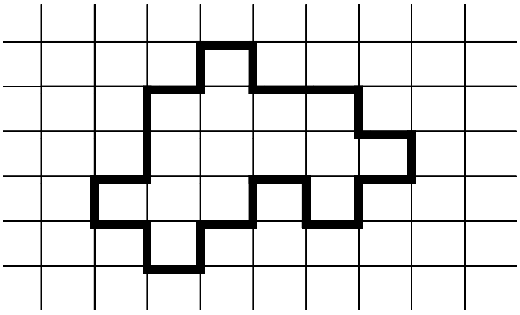
5. Kādu lielāko daudzumu dažādu naturālu skaitļu var uzrakstīt, lai vienlaicīgi izpildītos šādas īpašības:

- katrā skaitlī visi cipari ir dažādi un izvietoti augošā kārtībā;
- nav izmantoti citi cipari kā tikai 1; 2; 3; 4 ;
- katriem diviem skaitļiem ir vismaz viens kopīgs cipars (varbūt atšķirīgās vietās);
- nav tāda cipara, kas būtu sastopams visos skaitļos vienlaikus?

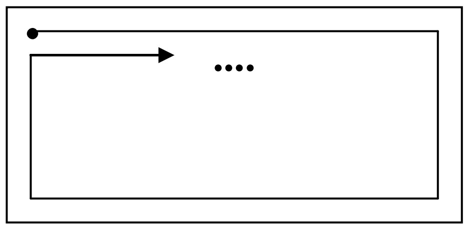
2006./2007.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

6. klase

1. Vai figūru, kas attēlota 1.zīm., var sagriezt trijās pēc formas un izmēriem vienādās daļās? Griezumiem jāiet pa rūtiņu līnijām.



1.zīm.



2.zīm.

2. Dots, ka n - pāra skaitlis. Pierādiet, ka skaitļu $\frac{n}{2}$ un 5n ciparu summas ir vienādas.

3. Taisnstūris sadalīts vienādās kvadrātiskās rūtiņās (tā platums ir 100 rūtiņas, augstums – 50 rūtiņas). Rūtiņas krāso pa vienai, sākot ar kreiso augšējo rūtiņu un virzoties pa spirāli (skat. 2.zīm.). Kuru rūtiņu nokrāsos pēdējo?

4. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 20 ieskaitot var sadalīt 5 grupās tā, lai visām grupām būtu vienādas summas? Bet skaitļus no 1 līdz 21 ieskaitot?

5. Astoņi skolēni risināja 8 uzdevumus. Katru uzdevumu atrisināja tieši 5 skolēni. Neviens skolēns neatrisināja vairāk par 5 uzdevumiem.

a) pierādīt, ka katrs skolēns atrisināja tieši 5 uzdevumus,

b) pierādīt, ka var atrast divus skolēnus, kas abi kopā atrisinājuši visus uzdevumus.

7. klase

1. Nezinītis izgudrojis dalāmības pazīmi ar 27: ja naturāla skaitļa ciparu summa dalās ar 27, tad pats skaitlis dalās ar 27. Pierādīt, ka šī pazīme nav pareiza.

2. Tabulā ar izmēriem 3x3 rūtiņas katrā rūtiņā ierakstīts pozitīvs skaitlis. Gan katrā rindiņā, gan katrā kolonnā ierakstīto skaitļu reizinājums ir 1. Katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā ierakstīto skaitļu reizinājums ir 2. Kāds skaitlis ierakstīts centrā? (Tabulu ar šādām īpašībām **uzrādīt nevajag**.)

3. Kādam naturālam skaitlim 30 reizes pieskaitīja naturālus skaitļus robežās no 1 līdz 10 ieskaitot. Vai var gadīties, ka gan sākotnējais skaitlis, gan katrs iegūtais rezultāts dalās vai nu ar 22, vai ar 25?

4. Ievietojiet vienādībā $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 = 7$ iekavas tā, lai tā kļūtu pareiza. (Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.)

5. Kvadrāts sastāv no 5x5 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts viens no burtiem a, b, c, d. Katrā 2x2 rūtiņu kvadrātā visi burti ir dažādi. Kāds ir lielākais iespējamais burtu „a” skaits?

8. klase

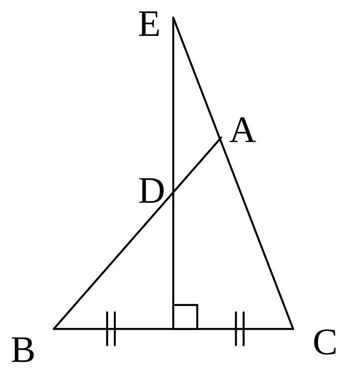
1. Vai kvadrātu, kas sastāv no 7x7 rūtiņām, var sagriezt gabalos tā, lai katrs gabals būtu vai nu 1x5, vai 2x3 rūtiņas liels?

2. Dzintars uzrakstīja uz tāfeles 4 pozitīvus skaitļus. Gunārs trīs reizes saskaitīja trijus no šiem skaitļiem (katru reizi citus). Vai viņa iegūtie rezultāti var būt 4, 5 un 9?

3. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n, ka

$$n \cdot (n+2)=200720052006?$$

4. Trijstūrī ABC novilkts malas BC vidusperpendikuls. Tas krusto malu AB punktā D, bet malas AC pagarinājumu – punktā E (skat. 3.zīm.). Pierādiet, ka AD < AE.



3.zīm.

5. Juliatai ir 201 monēta; no tām tieši 7 ir viltotas. Visas īstās monētas sver vienādi; visas viltotās monētas arī sver vienādi. Īstā monēta ir smagāka par viltoto. Kā ar trim svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem atrast 25 īstās monētas?

9. klase

1. Kvadrātvienādojuma $x^2 + px + q = 0$ saknes atšķiras viena no otras vismaz par 6. Pierādīt, ka kvadrātvienādojuma $x^2 + 2px + 3q = 0$ saknes atšķiras viena no otras vismaz par 10.

2. Andrim un Maijai bija vienāds daudzums konfekšu. Andris apēda 8 reizes mazāk konfekšu nekā Maija, un viņam palika 9 reizes vairāk konfekšu nekā Maijai. Pierādīt, ka Andra sākotnējais konfekšu skaits dalījās ar 71.

3. Uz taisnleņķa trijstūra ABC hipotenūzas AC atlikts tāds punkts D, ka CD = CB. Uz katetes BC atlikts tāds punkts E, ka DE = CE. Pierādīt, ka AD + BE = DE.

4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Katra rūtiņa jānokrāso kādā krāsā. Nepieciešams, lai katrām divām dažādām krāsām varētu atrast divas rūtiņas ar kopēju malu, kuras nokrāsotas šajās krāsās. Kāds ir lielākais iespējamais krāsu skaits?

5. Tabula aizpildīta ar skaitļiem, kā parādīts 4. zīm. Ar vienu gājienu var izvēlēties patvaļīgu pozitīvu skaitli k un pareizināt vai nu visus vienas rindas, vai visus vienas kolonnas skaitļus ar k. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var iegūt 5. zīm. attēloto situāciju?

3	4	5
6	7	8
9	10	11

4.zīm.

3	6	9
4	7	10
5	8	11

5.zīm.

10. klase

1. Dots, ka a, b un c apmierina sakarību $(a+b+c)(9a-3b+c)<0$, pie tam $a \neq 0$. Pierādīt, ka vienādojumam $ax^2+bx+c=0$ ir divas dažādas saknes.

2. Vienu un to pašu naturālo skaitli dalīja ar atlikumu ar 3, ar 24 un ar 50 (varbūt kāds atlikums bija 0). Iegūto triju atlikumu summa bija 17. Pierādīt, ka, dalot ar 3, ieguva atlikumu 1.

3. Trijstūra augstumu garumi ir 24, 30 un 40. Aprēķināt tā laukumu.

4. Šaurleņķu trijstūrī ABC novilkts augstums BD. No punkta D novilkti perpendikuli pret malām AB un CB; to pamati ir attiecīgi M un N. Pierādīt, ka punkti A, M, N, C atrodas uz vienas riņķa līnijas.

5. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis n un polinomi $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$, ka visiem x pastāv sakarība

$$x=(P_1(x))^3+(P_2(x))^3+\ldots+(P_n(x))^3\ ?$$

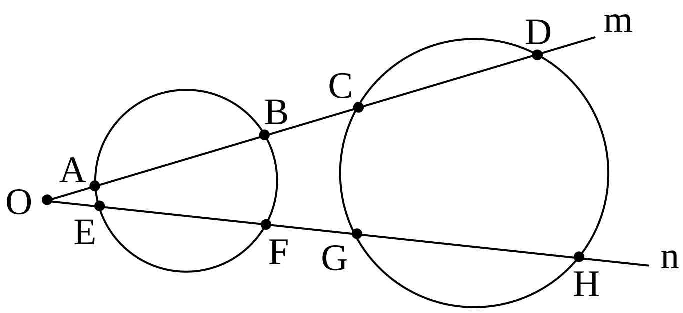
Vai šis apgalvojums paliek spēkā, ja vienādības kreisajā pusē x aizstāj ar x^{2006}?

11. klase

1. Dots, ka a un b - pozitīvi skaitļi. Funkciju $f(x)=ax^2+6x+b$ un $g(x)=bx^2+6x+a$ minimālo vērtību summa ir 0. Pierādīt, ka katra no šīm minimālajām vērtībām atsevišķi ir 0.

2. Naturāls skaitlis n ir 20 dažādu naturālu skaitļu reizinājums. Kāds ir mazākais iespējamais n naturālo dalītāju skaits?

3. Stari Om un On krusto divas riņķa līnijas, kā parādīts 6. zīm.



6. zīm.

Dots, ka B, C, G, F atrodas uz vienas riņķa līnijas. Pierādīt, ka arī A, D, H, E atrodas uz vienas riņķa līnijas.

4. Vai eksistē funkcija f(x), kas definēta visiem reāliem x, pieņem reālas vērtības un visiem reāliem x apmierina sakarību

$$f\left(-x^2+3x+1\right)=\left(f(x)\right)^2+2\,?$$

5. Apskatām tabulu ar izmēriem $2\times n$ rūtiņas (skat. 7. zīm.).

				…		
				…		

7. zīm.

Visās rūtiņās kopā kaut kā izvietotas 2^n monētas. Ar vienu gājienu var izvēlēties rūtiņu, kurā ir vismaz 2 monētas, vienu no šīm monētām aizvākt no tabulas, bet otru pārbīdīt vai nu vienu vietu uz augšu (ja to iespējams izdarīt), vai vienu vietu pa labi. Pierādiet: var panākt, lai labējās kolonnas augšējā rūtiņā atrastos kāda monēta.

12. klase

1. Kādu lielāko daudzumu komisiju var izveidot no 6 cilvēkiem, ja katrā komisijā ir vismaz viens cilvēks, neviens cilvēks nav visās komisijās, katrām divām komisijām ir vismaz viens kopējs loceklis un nekādas divas komisijas pēc sastāva nesakrīt?

2. Trijstūris ABC ir regulārs. Tam apvilkta riņķa līnija. Uz loka BC, kas nesatur virsotni A, ņemts punkts M. Pierādīt, ka MA = MB + MC.

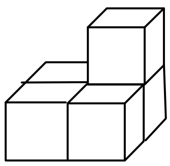
3. Vai pastāv tādi naturāli skaitļi n un k, ka

$$(1+2+3+...+n)+2=k^2?$$

4. Dots, ka a, b, c - pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka

$$a^3+b^3+c^3+15abc \le 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

5. Par ķieģeli sauksim figūru, kas sastāv no 5 vienādiem kubiņiem; četri no tiem izvietoti kvadrāta formā, bet piektais saskaras ar vienu no šiem četriem pa veselu skaldni, pie tam neatrodas tai pašā „slānī”, kur pārējie četri (skat. 8.zīm.).



8. zīm.

a) pierādīt, ka no vairākiem vienādiem ķieģeļiem var salikt kubu,

b) kāds ir mazākais iespējamais ķieģeļu skaits šādā kubā?