LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

2007./2008.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

Katra rajona metodiskā apvienība pati nolemj, vai un kad tā rīkos vai nerīkos šādu olimpiādi un, ja rīkos, tad cik un kurus no piedāvātajiem uzdevumiem izmantos. Uzdevumus var arī daļēji mainīt, pārcelt no vienas klašu grupas uz citu, izmantot skolas olimpiādēs, pulciņu darbā utt. **Rekomendējamais olimpiādes datums ir 23.novembris. Rīkot olimpiādi vai izmantot šeit piedāvātos uzdevumus citā veidā darbā ar skolēniem agrāk par šo datumu nedrīkst.**

Atsauksmes un ierosinājumus lūdzam sūtīt

- pa parasto pastu uz adresi:

A.Liepas NMS. SO
Fizikas un matemātikas fakultāte
Latvijas Universitāte
Rīgā, Zeļļu ielā 8
LV-1002

- vai pa elektronisko pastu uz adresi:

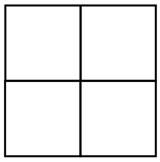
nms@lu.lv

Veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

LU NMS

5. klase

1. Rūtiņas malas garums ir 1 cm (skat. 1. zīm.). Parādiet, kā var uzzīmēt 1. zīm. attēloto figūru, neatraujot zīmuli no papīra un novelkot līniju ar garumu 14 cm (pa dažām vietām līnija drīkst iet vairākas reizes).



1. zīm.

2. Katrīnai ir 9 zīmuļi; vismaz viens no tiem ir zils. Ir zināms, ka vienlaicīgi izpildās šādas īpašības:

a) no katriem 5 zīmuļiem var izvēlēties ne vairāk kā 3 dažādu krāsu zīmuļus,

b) no katriem četriem zīmuļiem ne vairāk kā 3 ir vienā un tai pašā krāsā.

Cik zilu zīmuļu ir Katrīnai?

3. Zvaigznītes jāaizstāj ar dažādiem cipariem tā, lai iegūtu pareizu vienādību:

$$2*8*+48*7=2*1*+39*2.$$

Atrodiet iespējami daudzus veidus, kā to izdarīt. Pacentieties pamatot, kāpēc citu veidu bez jūsu atrastajiem nav.

4. Jūrnieka krekls sastāv no 25 melnām un 24 baltām joslām, kas izvietotas pamīšus. Ar vienu gājienu vienu joslu var pārkrāsot pretējā krāsā. Ja pēc tam divas vai vairākas pēc kārtas esošas joslas ir vienā krāsā, tās turpmāk uzskata par vienu joslu.

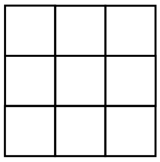
Ar kādu mazāko gājienu skaitu var panākt, lai viss krekls būtu vienā krāsā?

5. Andrim ir 16 kastītes. Tajās ir attiecīgi 1; 2; 3; ...; 15; 16 konfektes. Katru dienu Andris izvēlas dažas kastītes un apēd vienādu daudzumu konfekšu no tām visām.

Parādiet, kā Andris var 5 dienās apēst visas konfektes.

6. klase

1. Rūtiņas malas garums ir 1 cm (skat. 2. zīm.). Parādiet, kā var uzzīmēt 2. zīm. attēloto figūru, neatraujot zīmuli no papīra un novelkot līniju ar garumu 27 cm (pa dažām vietām līnija drīkst iet vairākas reizes).



2. zīm.

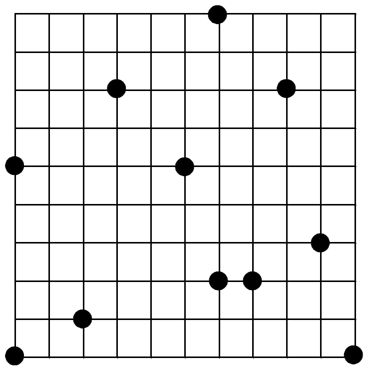
2. Ja x – naturāls skaitlis, kas nedalās ar 10, tad ar x' apzīmēsim skaitli, kas iegūts, uzrakstot x ciparus pretējā kārtībā. Vai var atrast tādus 5 naturālus skaitļus a, b, c, d, e, ka vienlaicīgi $a<b<c<d<e$ un $a'>b'>c'>d'>e'$?

3. Dažiem skolēniem klasē patīk matemātika, dažiem vēsture; pie tam dažiem patīk gan matemātika, gan vēsture, un katram patīk vismaz viens no šiem priekšmetiem. Ceturtdaļai no tiem, kam patīk matemātika, patīk arī vēsture; piektdaļai no tiem, kam patīk vēsture, patīk arī matemātika.

Kādai daļai skolēnu patīk matemātika?

4. Katri divi no 6 profesoriem savā starpā sarakstās vai nu angliski, vai latviski (tikai vienā no šīm valodām). Ir zināms, ka nav tādu trīs profesoru , kas visi savā starpā sarakstās angliski. Pierādīt: ir tādi 3 profesori, kas visi savā starpā sarakstās latviski.

5. Kuru rūtiņu virsotni jāizvēlas, lai attālumu summa no tās līdz atzīmētajiem 11 punktiem būtu vismazākā iespējamā? Režģis sastāv no vienādām kvadrātiskām rūtiņām; attālumus mēra pa rūtiņu līnijām (skat. 3. zīm.).



3. zīm.

7. klase

1. Dots, ka a, b un c ir dažādi naturāli skaitļi, c dalās ar a un $(a-b)(b-c)>0$. Kurš no šiem skaitļiem ir vislielākais, kurš – vismazākais?

2. Plaknē novilktas 6 taisnes. Vai var gadīties, ka ir tieši 16 punkti (ne vairāk un ne mazāk), katrs no kuriem pieder vismaz divām taisnēm? Vai var gadīties, ka ir tieši 14 šādi punkti?

3. Tabula sastāv no 5×5 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Vai var rūtiņās ierakstīt dažādus naturālus skaitļus tā, lai katrās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstītie skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 5, vai par 7?

4. Apļveida šosejas garums ir 100 km. Blakus tai atrodas 10 ciemati. Katra ciemata iedzīvotāji izmērīja attālumu pa šoseju līdz tuvākajam no abiem kaimiņu ciematiem; visu mērījumu summa ir 30 km. Pierādiet, ka uz šosejas ir tāds 14 km garš posms, kurā nav neviena ciemata. (Ciematus uzskatām par punktiem.)

5. Kvadrāts sastāv no 8×8 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa var būt vai nu balta, vai melna; sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties vai nu vienu rindiņu, vai vienu kolonnu un visas rūtiņas tajā pārkrāsot pretējā krāsā. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai kvadrātā būtu

a) tieši 17 melnas rūtiņas,

b) tieši 6 melnas rūtiņas?

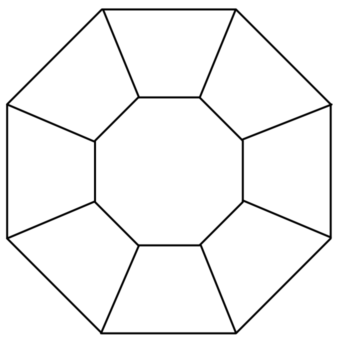
8. klase

1. Pierādiet, ka neviens no skaitļiem 2347108569; 123457754321; 359999 nav pirmskaitlis.

2. Maija iedomājās naturālu skaitli *n*. Dalot to ar 9, atlikums izrādījās vienāds ar nepilno dalījumu. Tas pats notika, dalot *n* ar 14. Kādas ir iespējamās *n* vērtības?

3. Trijstūrī ABC novilkta bisektrise BM; zināms, ka AB=BM. Uz bisektrises turpinājuma aiz punkta M atzīmēts tāds punkts N, ka $\angle \mathrm{BAN} + \angle \mathrm{BAM} = 180°$. Pierādīt, ka BN=BC.

4. Katrs 4. zīm. redzamais nogrieznis ir sarkans vai zaļš. Katram sarkanajam nogrieznim izskaitīja, cik zaļiem nogriežņiem ar to ir kopīgs galapunkts. Vai visu iegūto skaitļu summa var būt 21?



4. zīm.

5. Kvadrāts sadalīts 10×10 vienādās kvadrātiskās rūtiņās. Katrā rūtiņā dzīvo pa rūķītim. Katrs rūķītis vai nu vienmēr melo, vai vienmēr runā patiesību. Katrs no viņiem apgalvo, ka vienā kolonnā ar viņu ir vairāk meļu nekā vienā rindā ar viņu. Pierādīt, ka meļu skaits kvadrātā dalās ar 10.

9. klase

1. Dots, ka katram no vienādojumiem $x^2+2ax+b^2=0$ un $x^2+2bx+a^2=0$ ir vismaz viena sakne. Cik dažādu sakņu var būt kopā abiem vienādojumiem?

2. Koordinātu plaknē uzzīmēti visu funkciju $y=ax+b$ grafiki, kur a un b – naturāli skaitļi, kas nepārsniedz 10. Kāds lielākais daudzums šo grafiku iet caur vienu punktu?

3. Četrstūris ABCD ievilkts riņķa līnijā. Dots, ka AB=BD un AC=BC. Pierādīt, ka $\angle \mathrm{ABC} < 60°$.

4. Pa apli stāv 24 cilvēki; katrs no tiem vai nu vienmēr runā patiesību, vai vienmēr melo. Katrs no viņiem apgalvo: „nākošie 11 cilvēki pulksteņa rādītāja kustības virzienā aiz manis visi ir meļi”. Cik meļu stāv aplī?

5. Kvadrāts sastāv no 16×16 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katra rūtiņa var būt balta vai melna; sākumā visas rūtiņas ir baltas. Ar vienu gājienu var izvēlēties **a)** 2×2 rūtiņu kvadrātu, **b)** 9×9 rūtiņu kvadrātu un izvēlētajā kvadrātā mainīt visu rūtiņu krāsas: baltās rūtiņas pārkrāsot melnas, bet melnās – baltas.

Katrā no gadījumiem **a)** un **b)** noskaidrojiet, vai, atkārtojot šādus gājienus, iespējams iegūt kvadrāta krāsojumu šaha galdiņa formā (t.i., lai katras divas rūtiņas ar kopīgu malu būtu nokrāsotas dažādās krāsās).

10. klase

1. Dots, ka n – naturāls skaitlis. Apzīmēsim $R = n(n+1)(n+2)(n+4)(n+6)$.

a) pierādīt, ka R dalās ar 2,

b) pierādīt: ja $\frac{R}{n+1}$ dalās ar 2, tad tas dalās ar 128.

2. Dots, ka a, b, c – kāda trijstūra malu garumi. Pierādīt: vienādojumam $ax^2 + bx - c = 0$ intervālā [0; 1] ir tieši viena sakne.

3. Uz trijstūra ABC malām AB un BC ņemti attiecīgi punkti X un Y, kas nav trijstūra virsotnes. Dots, ka AX=BY un ∠XYB=∠BAC. Leņķa ABC bisektrise krusto malu AC punktā Z. Pierādīt, ka XZ||YC.

4. Kvadrāts sastāv no 101×101 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sadalīts mazākos kvadrātos ar izmēriem 2×2 un 3×3 rūtiņas. Pierādīt: eksistē tāda rūtiņu rinda, kas krusto nepāra skaitu dalījuma kvadrātu.

5. Uz šaha galdiņa novietotas vairākas figūriņas; katra no tām pilnībā aizņem vienu lauciņu. Ar vienu gājienu var vienu (jebkuru) figūriņu pārvietot uz jebkuru lauciņu, kas attiecīgajā brīdī ir brīvs. Pēc kāda laika izrādījās, ka katra figūriņa nonākusi katrā šaha galdiņa lauciņā tieši vienreiz un ar savu pēdējo gājienu atgriezusies tajā lauciņā, kurā tā atradās sākumā. Pierādīt: bija tāds brīdis, kad neviena figūriņa neatradās savā sākotnējā lauciņā.

11. klase

1. Regulārā 10-stūrī atzīmētas 5 virsotnes. Pierādīt: ir tādas 3 atzīmētas virsotnes, kuru veidotais trijstūris ir vienādsānu.

2. Pierādīt: ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu, kas nav izsakāmi kā vesela skaitļa kvadrāta un pirmskaitļa summa.

3. Trapeces ABCD pamati ir AD un BC. Uz malas AB atzīmēts tāds punkts E, ka AE:BE=AD:BC. Punkts H ir nogriežņa CE iekšējs punkts, un DH⊥CE. Pierādīt, ka AH=AD.

4. Apskatām kvadrātfunkciju $f(x)=ax^2-x+c$, $a\neq 0$. Ir dots, ka vienādojumam $f(f(x))=x$ nav sakņu. Pierādīt, ka $a\cdot c>1$.

5. Dotas 20 pēc ārējā izskata vienādas monētas; vairāk nekā puse no tām ir īstas. Visu īsto monētu masas ir vienādas; viltoto monētu masas ir citādas nekā īsto monētu masas, turklāt tās var arī atšķirties savā starpā. Pierādīt, ka ar 17 svēršanām uz sviras svariem bez atsvariem var atrast vismaz vienu īstu monētu. (Katrā svēršanā uz katra svaru kausa drīkst likt tikai vienu monētu.)

12. klase

1. Pierādīt: ja n – naturāls skaitlis, tad n^2+n+4 nedalās ar 9.

2. Dots, ka ABCD – trijstūra piramīda, $\angle ABC=\angle ADC=90°$ un AC<2. Pierādīt, ka BD<2.

3. Pierādīt, ka $a^6-6ab^5+5b^6\geq 0$ visiem reāliem a un b.

4. Šaurleņķu trijstūrī ABC punkts O ir apvilktās riņķa līnijas centrs, H – augstumu krustpunkts, AA_1 un CC_1 – augstumi. Dots, ka $\angle ABC=45°$. Pierādīt, ka taisne A_1C_1 iet caur nogriežņa OH viduspunktu.

5. Regulārā 2007-stūrī katrā virsotnē un katrā diagonāļu krustpunktā ierakstīts „1”. Ar vienu gājienu var mainīt skaitļus uz pretējiem visos punktos, kas atrodas uz vienas malas vai uz vienas diagonāles: „+1” aizstāt ar „-1”, bet „-1” – ar „+1”. Vai, atkārtojot šādus gājienus, var panākt, lai vienlaicīgi visās virsotnēs un visos diagonāļu krustpunktos būtu ierakstīts „-1”?