LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

2008./2009.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

Katra rajona metodiskā apvienība pati nolemj, vai un kad tā rīkos vai nerīkos šādu olimpiādi un, ja rīkos, tad cik un kurus no piedāvātajiem uzdevumiem izmantos. Uzdevumus var arī daļēji mainīt, pārcelt no vienas klašu grupas uz citu, izmantot skolas olimpiādēs, pulciņu darbā utt. **Rekomendējamais olimpiādes datums ir 28. novembris. Rīkot olimpiādi vai izmantot šeit piedāvātos uzdevumus citā veidā darbā ar skolēniem agrāk par šo datumu nedrīkst.**

Atsauksmes un ierosinājumus lūdzam sūtīt

- pa parasto pastu uz adresi:

A.Liepas NMS. SO
Fizikas un matemātikas fakultāte
Latvijas Universitāte
Rīgā, Zeļļu ielā 8
LV-1002

- vai pa elektronisko pastu uz adresi:

nms@lu.lv

Veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

LU NMS

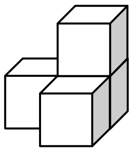
5. klase

1. Vai var no cipariem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, lietojot katru no tiem tieši vienu reizi, izveidot vairākus naturālus skaitļus tā, lai to visu summā visi cipari būtu nepāra?

2. Kuba šķautnes (malas) garums ir 1. No četriem šādiem kubiem saliktu figūru, kas redzama 1.zīm., sauc par ķieģeli.

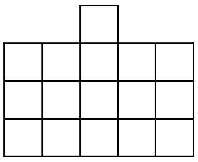
Vai no ķieģeļiem var salikt **a)** kubu ar izmēriem $4 \times 4 \times 4$,

b) kubu ar izmēriem $5 \times 5 \times 5$?

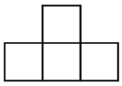


1.zīm.

3. Kāds ir mazākais rūtiņu daudzums, kādu var atzīmēt 2.zīm. attēlotajā figūrā, lai jebkurā tādā šīs figūras gabalā, kāds redzams 3.zīm. (tas var būt pagriezts arī citā virzienā) būtu vismaz viena atzīmēta rūtiņa?

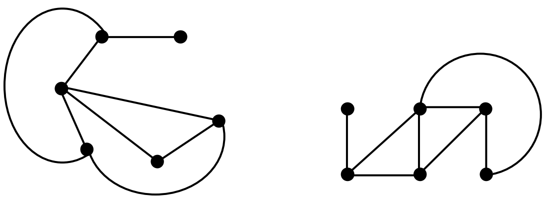


2.zīm.



3.zīm.

4. Apzīmējiet katrā no 4.zīm. parādītajām figūrām punktus ar burtiem A; B; C; D; E; F tā, lai abās figūrās ar līnijām būtu savienoti vieni un tie paši burtu pāri. Pietiek parādīt vienu veidu, kā to izdarīt.



4.zīm.

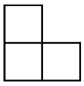
5. Doti 5 spaiņi. Katra spaiņa ietilpība ir 15 litri. Sākotnēji spaiņos ir attiecīgi 1 l; 2 l; 3 l; 4 l; 5 l ūdens. Ar vienu gājienu var izvēlēties divus spaiņus un no spaiņa, kurā ūdens nav mazāk kā otrā, pārliet otrā spainī tik ūdens, cik tur jau ir.

Kādu lielāko ūdens daudzumu var savākt vienā spainī, izpildot, ja vajadzīgs, vairākus gājienus?

6. klase

1. Doti 11 dažādi naturāli skaitļi. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus skaitļus, kuru starpība dalās ar 10.

2. Kvadrāts sastāv no 8×8 rūtiņām. Sākotnēji tās visas ir baltas. Andris un Katrīna pamīšus izdara gājienus. Andris ar savu gājienu pārkrāso melnā krāsā vienu (jebkuru) baltu rūtiņu. Katrīna ar savu gājienu pārkrāso melnā krāsā vienu (jebkuru) no baltām rūtiņām sastāvošu figūriņu, kāda redzama 5.zīm. (tā var būt novietota arī citādi). Sāk Andris. Kas nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kurš no bērniem uzvar, pareizi spēlējot?


5.zīm.

3. Uz galda atrodas trauks ar 10 zilām, 10 zaļām un 10 sarkanām konfektēm. Ar vienu gājienu atļaut apēst jebkādas divas dažādu krāsu konfektes, to vietā ieliekot traukā vienu trešās krāsas konfekti. Vai var gadīties, ka traukā paliek tikai viena konfekte?

4. Pie eglītes sapulcējušies 10 rūķīši – votivapas un šillišallas. Votivapas vienmēr melo; šillišallas vienmēr runā patiesību. Seši rūķīši uz jautājumu: „Ja Tevi neskaita, tad vai starp pārējiem rūķīšiem būtu vairāk votivapu vai šillišallu?" atbildēja, ka votivapu būtu vairāk. Cik ir votivapu un cik – šillišallu?

5. Katrā kuba skaldnē (t.i., katrā no 6 kvadrātiem, kas to norobežo) novilkta viena diagonāle. Ja divām diagonālēm ir kopīgs galapunkts, tad saka, ka tās draudzējas. Kāds ir lielākais iespējamais draudzību skaits?

7. klase

1. Izteiksmē $1:2:3:4:5:6$ ievietotas iekavas tā, ka izteiksmes vērtība ir pirmskaitlis. Vai tas var būt

a) 3, **b)** 5 ?

2. Andris un Maija uzzīmēja pa vienam trijstūriem (varbūt tie pilnīgi vai daļēji pārklājas), bet Katrīna abus trijstūrus izkrāsoja melnus. Vai melnais apgabals var būt

a) septiņstūris, **b)** desmitstūris ?

3. Kvadrāts sastāv no 6×6 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis no 1 līdz 36; četru rūtiņu „saturs" attēlots 6.zīm. Nekādās divās rūtiņās ar kopīgu malu ierakstītie skaitļi neatšķiras viens no otra vairāk kā par 15. Pierādīt, ka vismaz divās rūtiņās ierakstīti vienādi skaitļi.

	1			3	
	4			2	

6.zīm.

4. Rindā novietotas 4 monētas A, B, C, D (tieši šādā secībā). Ar vienu gājienu var mainīt vietām divas blakus esošas monētas. Vai monētas var pārkārtot secībā D, C, B, A, izdarot tieši

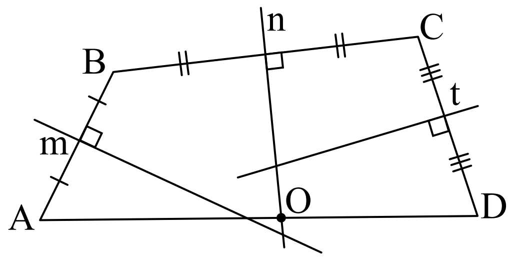
a) 4 gājienus, **b)** 99 gājienus?

5. Vai kvadrātā, kas sastāv no 4×4 rūtiņām, var ierakstīt naturālos skaitļus no 1 līdz 16 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai rindās un kolonnās ierakstīto skaitļu summas būtu 8 dažādi naturāli skaitļi, kas visi dalās ar 4?

8. klase

1. Kādu lielāko daudzumu no naturāliem skaitļiem 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12 var sadalīt divās grupās tā, lai abās grupās ietilpstošo skaitļu reizinājumi būtu vienādi savā starpā?

2. Taisnes m, n un t ir attiecīgi četrstūra $ABCD$ malu AB, BC, CD vidusperpendikuli (skat. 7.zīm.). Ar O apzīmēts n un AD krustpunkts. Pierādīt, ka $OA > OD$.



7.zīm.

3. Uzzīmējiet kaut vienu piecstūri, kuram nekādas divas diagonāles nekrustojas viena ar otru.

4. Vai kuba virsotnes un šķautnes var sanumurēt ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz 20 (visiem numuriem jābūt dažādiem), lai katras šķautnes numurs būtu vienāds ar tās galapunktu numuru summu?

5. Sniegbaltītes pulkstenim ir stundu, minūšu un sekunžu rādītāji; pulkstenis iet absolūti precīzi. Kādu dienu tieši 12:00 uz katra rādītāja nosēdās pa rūķītim. Brīdī, kad viens rādītājs apdzen otru, uz tiem sēdošie rūķīši mainās vietām. Pulksten 24:00 tai pašā dienā katrs rūķītis pateica Sniegbaltītei, cik pilnus apļus viņš novizinājies. Kādus trīs skaitļus dzirdēja Sniegbaltīte? (Varam uzskatīt par zināmu, ka šajā laika posmā nenotika neviena „divkāršā apdzīšana”.)

9. klase

1. Dots, ka $a<b<c<d<e$, $a+b=10$, $d+e=18$; visi skaitļi *a*; *b*; *c*; *d*; *e* ir naturāli. Aprēķināt $a+b+c+d+e$.

2. Uz trijstūra *ABC* malas *BC* atzīmēts punkts *M*, bet uz malas *AC* – punkts *N*. Dots, ka $\angle BCA = 20°$ un *CM* = *MN* = *NB* = *BA*. Pierādīt, ka *AN* = *BN*.

3. Skaitļa *n* decimālais pieraksts sastāv no 11 vieniniekiem, 11 divniekiem, 11 trijniekiem un 11 četriniekiem. Vai skaitlis $n+4$ var būt pirmskaitlis?

4. Profesoram Cipariņam uzdāvinātas 5 pēc ārējā izskata vienādas zelta monētas; tām visām ir dažādas masas. Ja Cipariņš norāda uz jebkurām 3 monētām, dāvinātājs pasaka, kura no tām ir pēc masas vidējā.

Kā Cipariņš var noskaidrot, kura ir pēc masas vidējā no visām 5 monētām, izmantojot tikai šādus jautājumus un atbildes?

5. Katrs vesels skaitlis nokrāsots vai nu balts, vai sarkans, pie tam skaitļi 5 un 6 nokrāsoti dažādi. Pierādīt, ka var atrast tādus trīs vienādi nokrāsotus skaitļus, kuru summa ir nulle.

10. klase

1. Kādām a vērtībām vienādojumam $x^3 + ax - 2(a+4) = 0$ ir tieši 2 dažādas saknes?

2. Izliektā četrstūrī $ABCD$ diagonāles AC vidusperpendikuls krusto diagonāli BD (nevis tās pagarinājumu!) Vai var gadīties, ka četrstūrī $ABCD$ var ievilkt riņķa līniju?

3. Pierādīt, ka skaitļi $2n^3 + 4n$ un $n^3 + 5n$ dalās ar 3 pie vienām un tām pašām n vērtībām.

4. Visa plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Divi spēlētāji pamīšus krāso pa vienam vēl nenokrāsotam kvadrātiņam: viens – zaļā krāsā, otrs – sarkanā krāsā. Uzvar tas, kurš pirmais nokrāso savā krāsā kādu no 4 rūtiņām sastāvošu kvadrātu. Vai pirmais spēlētājs var garantēt sev uzvaru?

5. Vai kubiskā kastē ar izmēriem $6 \times 6 \times 6$ var ievietot 53 klucīšus ar izmēriem $1 \times 1 \times 4$ tā, lai klucīšu šķautnes būtu paralēlas kastes šķautnēm un kasti varētu aizvērt?

11. klase

1. Dots, ka a un b – pozitīvi skaitļi. Pierādīt, ka $3a^8 + 5b^8 \geq 8a^3b^5$.

2. Trijstūra ABC virsotnes leņķa A bisektrise krusto apvilkto riņķa līniju punktā M. Ar I apzīmējam ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru. Pierādīt, ka $MB = MC = MI$.

3. Dots, ka a, b un c ir naturāli skaitļi, bet reizinājumi ab, bc un ca ir naturālu skaitļu kubi. Pierādīt, ka arī paši skaitļi a, b un c ir naturālu skaitļu kubi.

4. Kvadrāts sastāv no 3×3 rūtiņām. Sākumā visās rūtiņās ierakstīti vieninieki. Ar vienu gājienu drīkst izvēlēties divas rūtiņas ar kopēju malu un abiem tajās ierakstītajiem skaitļiem pieskaitīt pa vieniniekam vai arī no tiem abiem atņemt pa vieniniekam. Pēc kāda laika skaitļi visās rūtiņās bija vienādi. Pierādīt, ka šajā brīdī bija izdarīts pāra skaits gājienu.

5. Katrā kuba skaldnē novilkta viena diagonāle. Ja divām novilktajām diagonālēm ir kopīgs galapunkts, teiksim, ka šīs divas diagonāles draudzējas.

Kāds ir mazākais iespējamais draudzību skaits?

12. klase

1. Atrisināt pozitīvos skaitļos vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$

2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BD*. Uz malām *AB* un *CB* attiecīgi ņemti tādi punkti *M* un *N*, ka $HM \perp AB$ un $HN \perp CB$. Pierādīt, ka punkti *A*; *M*; *N*; *C* atrodas uz vienas riņķa līnijas.

3. Dots, ka n ir naturāls skaitlis un skaitļa $A = n^2 + 2008n$ pēdējais cipars ir 4. Atrast skaitļa *A* priekšpēdējo ciparu.

4. Plakne sadalīta vienādos kvadrātiņos kā rūtiņu lapa. Tajā novietoti bezgalīgi daudzi taisnstūri tā, ka katrs taisnstūris pārklāj tieši divus kvadrātiņus. Nekādi divi taisnstūri ne pārklājas, ne saskaras. Vai atlikušo plaknes daļu noteikti var pārklāt ar tādiem pašiem taisnstūriem tā, lai nekādi divi taisnstūri nepārklātos, bet **visas** rūtiņas būtu pārklātas?

5. Klasē ir z zēni un m meitenes. Katriem diviem zēniem var atrast meiteni, kas vienam no viņiem patīk, bet otram nepatīk. Pierādīt, ka $2^m \geq z$.