LATVIJAS UNIVERSITĀTE
Fizikas un Matemātikas fakultāte
A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

2010./2011.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

Katra metodiskā apvienība pati nolemj, vai un kad tā rīkos vai nerīkos šādu olimpiādi un, ja rīkos, tad cik un kurus no piedāvātajiem uzdevumiem izmantos. Uzdevumus var arī daļēji mainīt, pārcelt no vienas klašu grupas uz citu, izmantot skolas olimpiādēs, pulciņu darbā utt. **Rekomendējamais olimpiādes datums ir 26. novembris. Rīkot olimpiādi vai izmantot šeit piedāvātos uzdevumus citā veidā darbā ar skolēniem agrāk par šo datumu nedrīkst.**

Atsauksmes un ierosinājumus lūdzam sūtīt

- pa parasto pastu uz adresi:

A.Liepas NMS. SO
Fizikas un matemātikas fakultāte
Latvijas Universitāte
Rīgā, Zeļļu ielā 8
LV-1002

- vai pa elektronisko pastu uz adresi:

nms@lu.lv

Veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

LU A.Liepas NMS

2010./2011.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

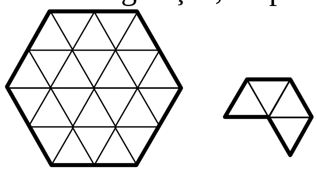
5. klase

1. Atrisiniet skaitļu rēbusu – aizstājiet burtus ar cipariem tā, lai iegūtu pareizu vienādību. Vienādiem burtiem atbilst vienādi cipari, bet dažādiem burtiem – dažādi cipari, pie tam zināms, ka burtam E atbilst nepāra cipars.
(*Piezīme:* skaitļa pirmais cipars nevar būt 0.)

```
   VIENS
    DIVI
+   DIVI
--------
   PIECI
```

2. a) Izmantojot visus ciparus, katru tieši vienu reizi, izveidojiet piecus divciparu skaitļus, kuru attiecība ir 1:2:3:4:5.
b) Izmantojot tikai ciparus 1, 2, 3, 4, 5, 6 7, 8 un 9, katru tieši vienu reizi, izveidojiet piecus skaitļus, kuru attiecība ir 1:2:3:4:5.

3. Sagrieziet 1. zīm. attēloto sešstūri tādās figūriņās, kā parādīts 2. zīm.



1. zīm. 2. zīm.

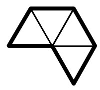
4. No mucas, kas bija pilna ar ūdeni, visu ūdeni vienādās daļās izlēja trīs tukšos spaiņos. Izrādījās, ka pirmajā spainī ūdens aizņem tieši pusi, otrajā - $\frac{2}{3}$, bet trešajā - $\frac{3}{4}$. Gan mucas, gan katra spaiņa tilpums ir vesels skaits litru. Kāds ir mazākais mucas tilpums, pie kura iespējama aprakstītā situācija?

5. Jānim divās kabatās katrā ir pa 98 santīmiem. Labajā kabatā ir 49 monētas, bet kreisajā – 50 monētas. Vai **vienmēr** ir iespējams labās kabatas saturu sadalīt divās kaudzītēs, lai katrā kaudzītē būtu pa 49 santīmiem? Un kreisās kabatas saturu?

6. klase

1. Atrodiet tādu desmitciparu naturālu skaitli, kura decimālais pieraksts satur katru no cipariem 0, 1, …, 9 tieši vienu reizi un kas dalās ar 2010 bez atlikuma.

2. Dots regulārs sešstūris ar malas garumu 4. Sagrieziet to tādās figūrās, kā parādīts 3. zīmējumā; figūra sastāv no 4 regulāriem trijstūriem ar malas garumu 1.
(*Piezīme:* par regulāru daudzstūri sauc tādu daudzstūri, kuram visas malas ir vienāda garuma un visi leņķi ir vienādi.)



3. zīm.

3. Noskaidrojiet, cik maksā 1 pildspalva, ja zināms, ka 16 šādas pildspalvas maksā tik latus, cik šādas pildspalvas var nopirkt par vienu latu!

4. Skaitļu virknes pirmais loceklis ir 11, bet katrs nākamais ir vienāds ar iepriekšējā skaitļa kvadrāta (reizinājuma pašam ar sevi) ciparu summu. Kāds skaitlis šajā virknē ir 2010. vietā?

5. Annai ir pa divām zilām, sarkanām, baltām un melnām bumbiņām, kā arī sviras svari bez atsvariem. Viņa uz svaru labā kausa uzlika dažas (varbūt vienu) dažādu krāsu bumbiņas, bet uz kreisā kausa – šo pašu krāsu otrās bumbiņas. Labais svaru kauss izrādījās smagāks. Vēl Anna ievēroja, ka, samainot vietām jebkuras divas vienas krāsas bumbiņas, svaru stāvoklis mainījās – vai nu iestājās līdzsvars, vai arī kreisais kauss kļuva smagāks. Kādu lielāko skaitu bumbiņu Anna var būt uzlikusi uz viena svaru kausa?

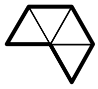
7. klase

1. Zelmas dzīvokļa numurs ir divciparu skaitlis un tam piemīt šāda īpašība: saskaitot tā ciparu summu un reizinājumu, atkal iegūst šo pašu skaitli. Atrodiet visus tādus divciparu skaitļus, kam piemīt šāda īpašība.

2. Uzzīmējiet 10-stūri, kuram uz katras taisnes, uz kuras atrodas viena tā mala, atrodas vismaz vēl viena tā mala.

3. Cik dažādos veidos skaitli 51 var izteikt kā divu vai vairāk pēc kārtas sekojošu naturālu skaitļu summu? (Veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo kārtību, uzskata par vienādiem.)

4. Pierādiet, ka regulāru sešstūri ar malas garumu n, kur n – pāra skaitlis, var sagriezt tādās figūrās, kā parādīts 4. zīmējumā; figūra sastāv no 4 regulāriem trijstūriem ar malas garumu 1. (*Piezīme:* par regulāru daudzstūri sauc tādu daudzstūri, kuram visas malas ir vienāda garuma un visi leņķi ir vienādi.)



4. zīm.

5. Kārlim ir īpašs kalkulators, kas var izpildīt tikai divas operācijas:

1) ja tiek ievadīts skaitļu pāris (a, b), kalkulators izdod skaitļu pāri (a+1, b-2);
2) ja tiek ievadīts skaitļu pāris (a, b), kalkulators izdod skaitļu pāri (a+2, b-1).

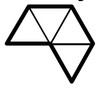
Vai ar šo kalkulatoru, lietojot to vairākkārt, no pāra (1,30) var iegūt pāri (13,17)?

8. klase

1. Dots, ka *a* un *b* – reāli pozitīvi skaitļi. Pierādiet, ka $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}>\frac{a+b}{a+b+1}$.

2. Trīsstūrī ABC malu AB, BC un AC viduspunkti ir attiecīgi punkti D, E un F. No punktiem D un E pret malu AC ir vilkti perpendikuli, kas krusto malu AC (vai tās pagarinājumu) attiecīgi punktos G un H. Pierādiet, ka GF=CH.

3. Kādiem *n* regulāru sešstūri ar malas garumu *n* var sagriezt tādās figūrās, kā parādīts 5. zīmējumā; figūra sastāv no 4 vienādmalu trijstūriem ar malas garumu 1.



5. zīm.

4. Rindā uzrakstīti 2010 cipari tā, ka katrs divciparu skaitlis, ko veido divi blakus esošie cipari (tādā secībā, kā uzrakstīti), dalās vai nu ar 17, vai ar 23. Kāds šajā rindā ir

a) pēdējais cipars, ja pirmais cipars ir 9

b) pirmais cipars, ja pēdējais cipars ir 1?

5. Pie sienas ir lampiņas, kas pēc kārtas sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 2 līdz N. Vadības panelī ir slēdži, kuri numuri ir pēc kārtas sekojoši pirmskaitļi, sākot no 2 (pēdējā slēdža numurs ir pirmskaitlis, kas pārsniedz N). Kad pārslēdz slēdzi ar numuru K, visas lampiņas, kuru numuri dalās ar K, maina savu stāvokli (no ieslēgtas uz izslēgtu vai no izslēgtas uz ieslēgtu). Sākumā visas lampiņas ir izslēgtas. Zināms, ka ar slēdžu palīdzību var panākt, ka visas lampiņas vienlaicīgi ir ieslēgtas. Kādai lielākajai N vērtībai tas ir iespējams?

2010./2011.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

9. klase

1. Pierādiet, ka $x^4 + y^4 \geq x^3 y + xy^3$ visiem reāliem *x* un *y*.

2. Trijstūrī viena no mediānām perpendikulāra vienai no bisektrisēm. Pierādiet, ka viena no trijstūra malām ir divas reizes garāka par otru.

3. Zināms, ka skaitlis A dalās ar 7 un tā decimālais pieraksts satur tikai ciparus 1. Pierādiet, ka A dalās arī ar 13.

4. Pierādiet, ka izliektu 39-stūri nevar sadalīt deviņos izliektos sešstūros.

5. Dots kvadrāts ar izmēriem 4×4 rūtiņas. Divi spēlētāji pēc kārtas iekrāso pa vienai rūtiņai. Zaudē tas, pēc kura gājiena izveidojas iekrāsots kvadrāts 2×2 rūtiņas. Kurš no spēlētājiem vienmēr var panākt savu uzvaru? Aprakstiet uzvarētāja spēles stratēģiju.

2010./2011.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

10. klase

1. Dots, ka $a^2 + ab + ac < 0$. Pierādiet, ka $b^2 > 4ac$.

2. Vai var rindā uzrakstīt 2010 dažādus skaitļus a_1, a_2, ..., a_{2010} tā, ka vienlaicīgi izpildās šādas divas īpašības:

- katrs no tiem ir kādam naturālam skaitlim apgrieztais skaitlis,
- $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_{2010} - a_{2009}$.

3. Atrodiet visus naturālos skaitļus n, kuriem izpildās vienādība

$n = pqrs = 2p^{10} - 38$ (p, q, r, s – dažādi pirmskaitļi).

4. Piramīdas pamats ir daudzstūris ar nepāra skaitu malu. Vai uz visām tās šķautnēm var izvēlēties virzienus tā, lai iegūto vektoru summa būtu $\vec{0}$?

5. Ir deviņas lampiņas, kas pēc kārtas sanumurētas ar naturāliem skaitļiem no 2 līdz 10. Sākumā visas lampiņas ir izslēgtas. Vadības panelī ir četri slēdži, kuru numuri ir 2, 3, 5 un 7. Kad pārslēdz slēdzi ar numuru K, visas lampiņas, kuru numuri ir K daudzkārtņi, tiek pārslēgtas uz pretējo (ieslēdz, ja bija izslēgta, vai izslēdz, ja bija ieslēgta). Kāds lielākais lampiņu skaits vienlaicīgi var būt ieslēgtas?

11. klase

1. Atrisināt naturālos skaitļos vienādojumu

$$7^x + 8^y = 13^z$$

2. Riņķa līnijā ω_1 ar centru punktā O_1 novilkta horda AB un tai paralēls rādiuss O_1C (CB<AC). Riņķa līniju, kas iet caur punktiem A, O_1 un C, apzīmēsim ar ω_2. Pierādiet, ka ω_2 centrs O_2 atrodas uz taisnes, kas iet caur punktiem B un C.

3. Dota virkne $x_0 > 1$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$ (n=0, 1, 2 ...). Pierādiet, ka $x_{333} > 10$.

4. Dota kvadrātveida tabula ar izmēriem 15×15 rūtiņas. Katra tās rūtiņa nokrāsota vienā no trīs dažādām krāsām. Pierādiet, ka atradīsies vismaz divas tādas rindiņas, kurās vismaz vienas krāsas rūtiņu skaits ir vienāds.

5. Plaknē doti 100 zili un 100 sarkani punkti, nekādi trīs no tiem neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka tos pa pāriem var savienot ar 100 nogriežņiem tā, ka katram nogrieznim vienā galā ir zils punkts, otrā – sarkans un nogriežņi nekrustojas.

2010./2011.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

12. klase

1. Vai eksistē tāda a vērtība, ka vienādojumam $\sin x = ax$ ir tieši 2010 dažādas saknes?

2. Vai eksistē tāda trijstūra piramīda, kurā no katras sānu šķautnes viduspunkta pretēja šķautne redzama taisnā leņķī?

3. Aprēķiniet izteiksmes $arctg1 + arctg2 + arctg3$ vērtību.

4. Dots, ka naturāls skaitlis $n = 2 \cdot (10^k + 5)$ dalās ar 67 (k – vesels skaitlis), un tam ir tieši 16 naturāli dalītāji. Atrodiet skaitli n.

5. Kalkulators strādā ar skaitļu četriniekiem un izpilda tikai divas operācijas:

1) ja tiek ievadīts (a, b, c, d), kalkulators to pārveido par $(a+1, b+d, c-1, d+1)$;
2) ja tiek ievadīts (a, b, c, d), kalkulators to pārveido par $(a, b-1, c+2, d+1)$.

Vai ar šo kalkulatoru, lietojot to vairākkārt, no četrinieka $(3,4,2,1)$ var iegūt četrinieku $(6,5,7,8)$?