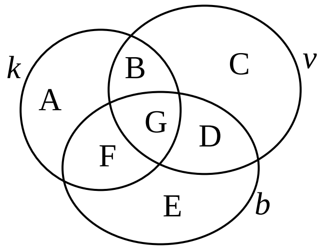
5.1. Meklētajam jābūt četrciparu skaitlim, jo lielākā trīsciparu skaitļa ciparu reizinājums ir $9\cdot9\cdot9=729<2012$. Vismazākajam no atbilstošajiem četrciparu skaitļiem cipari ir sakārtoti augošā secībā.

Noskaidrosim, kāds var būt mazākais cipars skaitļa pierakstā. Ja tas ir mazāks nekā 4, tad atlikušo trīs ciparu reizinājums nepārsniedz $7\cdot8\cdot9=504$, un visu četru ciparu reiznājums nepārsniedz $3\cdot504=1512<2011$. Tātad pirmais cipars ir vismaz 4.

Ja otrais cipars ir mazāks nekā 7, tad visu četru ciparu reizinājums ir ne lielāks kā $4\cdot6\cdot8\cdot9=1728<2012$. Vēl trūkst divi dažādi cipari, kas lielāki nekā 7, tātad trešais un ceturtais cipars ir attiecīgi 8 un 9. Tātad mazākais skaitlis, kura ciparu reizinājums ir vismaz 2012, ir **4789**.

5.2. Apzīmēsim to absolventu skaitu, kas māk spēlēt klavieres, ar k, kas māks spēlēt vijoli – ar v, un tos, kas spēlē bungas – ar b. Apskatīsim Eilera – Venna diagrammu (1. zīm.).

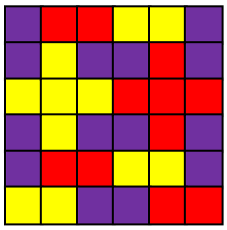


1. zīm.

Summā 37+30+43 apgabali A, C un E (tajos kopā ir 32 absolventi, kas prot spēlēt tikai vienu instrumentu) ir ieskaitīti vienreiz, apgabali B, D un F (tajos kopā ir 33 absolventi, kas māk spēlēt tieši divus instrumentus) ieskaitīti divreiz, bet apgabals G (tie, kas māk spēlēt visus trīs instrumentus) tiek ieskaitīts trīs reizes.

Tātad $37+30+43-32-2\cdot33=12=3\cdot G$ un $G=4$, t.i. visus trīs mūzikas instrumentus prot spēlēt **četri absolventi**.

5.3. Mazākais kvadrāts, ko var izveidot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, ir 6×6 rūtiņas, skat., piem., 2. zīm.



2. zīm.

5.4. a) Atbilde: ne obligāti. Īsajā gadā ir 365 dienas jeb 52 pilnas nedēļas un viena diena. Ja 1. janvāris ir ceturtdiena, tad arī 31. decembris ir ceturtdiena un ceturtdienu skaits gada laikā būs par vienu lielāks nekā trešdienu un piektdienu skaits.

b) Garajā gadā ir 366 dienas – 52 pilnas nedēļas un vēl 2 dienas, tāpēc a) punktā aprakstītā situācija nav iespējama. Tāpēc, ja trešdienu un piektdienu skaits ir vienāds (t.i., 52), arī ceturtdienu skaits būs tāds pats.

5.5. Visas naudas summas no 2 līdz 9 santīmiem var izteikt ar tieši trīs dažādu monētu palīdzību: $2=5-2-1$, $3=10-5-2$; $4=5+1-2$; $5=20-10-5$; $6=5+2-1$; $7=10-2-1$; $8=5+2+1$; $9=10+1-2$.

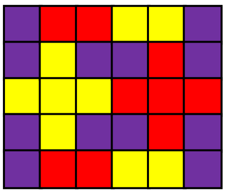
Pamatosim, ka 10 santīmus nevar samaksāt ar trīs dažādu monētu palīdzību. Vispirms ievērosim, ka summu 0 nevar iegūt ar vienas vai divu dažādu monētu palīdzību. Līdz ar to pircējs nevar izmantot 10 santīmu monētu. No divām vai trim monētām, kuru vērtība ir mazāka nekā 10, nevar izveidot summu, kas vienāda ar 10. Ja pircējs maksā ar 10 santīmu un vēl vienu monētu, tad pārdējam jāizdod tāda pati monēta, bet tad tiek izmantotas tikai divas dažādas monētas. Ja pircējs maksā ar 20 santīmu monētu, tad pārdevējam jāizdod 10 santīmu monēta, bet to nevar izdarīt ar tieši divu monētu palīdzību. Ja pircējs maksā ar 20 santīmu monētu un vēl vienu monētu, tad pārdevējam ar vienu monētu jāizdod vairāk nekā 10 santīmi, bet to nevar izdarīt.

6.1. Aplūkosim skaitļa 20 dalītājus – viencipara skaitļus: tie ir 1, 2, 4 un 5. Skaitli 1 kā reizinātāju var izmantot patvaļīgu skaitu reižu – tas nemaina reizinājuma vērtību. Tātad skaitli 20 kā viencipara skaitļu reizinājumu, kuru summa ir 11, var izteikt divos veidos: a) $5\cdot4\cdot1\cdot1$ vai b) $5\cdot2\cdot2\cdot1\cdot1$.

No a) varianta cipariem var izveidot 12 dažādus skaitļus (piecinieks var atrasties jebkurā no 4 vietām, četrinieks – jebkurā no trim atlikušajām vietām, bet pārējās vietās viennozīmīgi jāieraksta vieninieki). Līdzīgi noskaidro, ka no b) varianta cipariem var izveidot 30 dažādus skaitļus. Tātad pavisam ir **42 skaitļi** ar meklētajām īpašībām.

6.2. Septiņciparu *palindroms* uzrakstāms formā $\overline{abcdcba}$, kur *a*, *b*, *c*, *d* ir cipari (varbūt vienādi; $a\neq0$). Jo mazāks ir četrciparu skaitlis $\overline{abcd}$, jo mazāks ir *palindroms* $\overline{abcdcba}$, tāpēc pietiek apskatīt visus četrciparu skaitļus un noskaidrot, kurš no tiem pēc kārtas ir 2011-ais. Pirmais četrciparu skaitlis ir 1000, 2001-ais – 3000, tātad 2011-ais četrciparu skaitlis ir 3010 un meklētais septiņciparu *palindroms* ir **3010103.**

6.3. Mazākais taisnstūris, ko var izveidot atbilstoši uzdevuma nosacījumiem, ir 5×6 rūtiņas, skat. 3. zīm.



3. zīm.

6.4. Apzīmēsim piecstūra īsākās malas garumu ar *a*, tad sešstūra garākās malas garums arī ir *a*.
Tad piecstūra perimetrs ir $a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)=5a+10$, bet sešstūra perimetrs ir $a+(a-1)+(a-2)+(a-3)+(a-4)+(a-5)=6a-15$. Tātad $5a+10=6a-15$ un sešstūra garākā mala $a=25$ cm, bet sešstūra īsākā mala ir ***a*-5=20 cm**.

5. Aplūkosim, kuri apgalvojumi ir patiesi, ja dimants atrodas noteiktas krāsas lādītē.

Dimants/Apgalvojums	*Uz sarkanās lādītes*	*Uz dzeltenās lādītes*	*Uz zaļās lādītes*	*Uz brūnās lādītes*
Sarkanajā lādītē	Patiess	Patiess	Patiess	Aplams
Dzeltenajā lādītē	Aplams	Aplams	Patiess	Patiess
Zaļajā lādītē	Aplams	Aplams	Aplams	Patiess
Brūnajā lādītē	Aplams	Patiess	Patiess	Patiess

Kā redzam, tikai tad, ja dimants atrodas **zaļajā** lādītē, patiess ir tieši viens apgalvojums.

7.1. a) Piemēram, $3x+1=2x+1$.
b) Piemēram, $3x+1=3x+2$.
c) Lai vienādojumam nebūtu sakņu, jābūt $a=c$ un $b\neq d$. $a=c$ var izvēlēties 3 veidos, katram no tiem *b* un *d* var izvēlēties 6 veidos. Tātad pavisam ir $3\cdot6=18$ vienādojumi, kuriem nav atrisinājuma.

7.2. Apskatīsim uzdevuma atrisinājumu vispārīgajā gadījumā, ja plaknē ir dotas n taisnes. Tad katra taisne krusto visas pārējās n-1 taisnes, katru citā punktā. Tā kā katrs krustpunkts šādā veidā tiek ieskaitīts tieši divas reizes (uz katras no abām taisnēm, kas krustojas šajā punktā), tad pavisam dažādo krustpunktu skaits ir $\frac{n(n-1)}{2}$.

a) Ja n=5, tad krustpunktu skaits ir $\frac{5\cdot 4}{2}=10$.

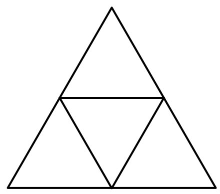
b) Ja n=2011, tad krustpunktu skaits ir $\frac{2011\cdot 2010}{2}=2021055$.

7.3. Saskaņā ar virknes veidošanas likumu

$$u_{n+1}=\underbrace{u_1^2+u_2^2+u_3^2+...+u_{n-1}^2}_{u_n}+u_n^2=u_n+u_n^2=u_n(1+u_n).$$

Tātad, ja kāds virknes loceklis dalās ar 7, tad arī nākamais virknes loceklis dalīsies ar 7. Apskatīsim virknes pirmos locekļus: u_1=1, u_2=1, u_3=2, u_4=6, u_5=42, ... Redzam, ka u_5 dalās ar 7, tāpēc visi nākamie virknes locekļi, t.sk., u_{2011} dalās ar 7.

7.4. Sadalām doto trijstūri četros vienādos vienādmalu trijstūros kā parādīts 4. zīmējumā. Katra trijstūra visu malu garumi ir 1 cm, tāpēc attālums starp diviem punktiem, kas atrodas viena trijstūra iekšpusē vai uz tā kontūra, nepārsniedz malas garumu, t.i., 1 cm. Tā kā ir atzīmēti 5 sarkani punkti, tad vismaz divi sarkanie punkti būs atzīmēti viena trijstūra iekšpusē vai uz tā kontūra. Tie arī ir meklētie divi punkti.



4. zīm.

7.5. Jā, Pēteris var uzvarēt. Atbildot uz Jāņa gājieniem, Pēteris raksta ciparus tā, lai izveidotos skaitlis $\overline{abcabc}=1001\cdot\overline{abc}$. Šis skaitlis dalās ar 1001=13·11·7, tātad tas dalās arī ar 13.

8.1. Skaitļi k un m norāda taišņu krustpunktu ar Oy asi u koordinātu, tātad k<m. Taišņu virziena koeficienti a un b norāda taišņu „slīpumu”, tātad a>b. No tā seko, ka b-a<0 un k-m<0, tāpēc $(b-a)(k-m)>0$.

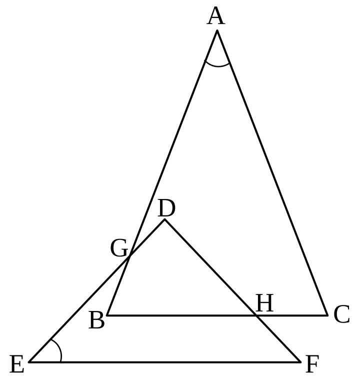
8.2. Dots, ka ∠BAC=∠DEF=32° (skat. 5. zīm.). ∠AGE=∠BGD kā krustleņķi. No četrstūra BGDH leņķu summas iegūstam, ka ∠BGD=360°-∠EDF-∠DHB-∠HBG.

$\angle \mathrm{GBC}=\frac{1}{2}(180°-\angle \mathrm{BAC})=\frac{1}{2}(180°-32°)=\frac{1}{2}\cdot 148°=74°$.

∠DHB=∠DFE=∠DEF=32° (kā kāpšļu leņķi pie paralēlām taisnēm BC un EF).

∠EDF=180°-2·∠DEF=116°.

Tātad ∠AGE=∠BGD=360°-116°-32°-74°=**138°**



5. zīm.

8.3. Lai reizinājums būtu nepāra skaitlis, visiem reizinātājiem jābūt nepāra skaitļiem. Divu skaitļu starpība ir nepāra skaitlis tikai tad, ja viens no skaitļiem ir pāra skaitlis, bet otrs – nepāra skaitlis. Ņemot pēc kārtas nepāra skaitu naturālu skaitļu, gan starp skaitļiem 1, 2, ..., n, gan starp skaitļiem a_1, a_2, ..., a_n nepāra skaitļu būs par vienu vairāk nekā pāra skaitļu. Tātad nav iespējams sadalīt šos skaitļus n pāros tā, ka katrā pārī viens skaitlis ir pāra skaitlis, bet otrs – nepāra. Tātad vismaz vienās iekavās būs divu nepāra skaitļu starpība, kas dod pāra skaitli, līdz ar to reizinājums arī būs pāra skaitlis.

8.4. Ja jebkurai veselai nenulles skaitļa k vērtībai aplūko skaitļus intervālā [30k; 30k+29], tad viegli pamanīt, ka ar 2, 3 vai 5 nedalās astoņi no šiem skaitļiem: 30k+1, 30k+7, 30k+11, 30k+13, 30k+17, 30k+19, 30k+23 un 30k+29. Tātad, lai noteiktu prasīto virknes locekļu vērtības, nepieciešams noteikt 1) kurai grupai tas pieder – atrast attiecīgo k vērtību (k=0, 1, 2, ...) un 2) kurš pēc kārtas elements grupā tas ir.

$2011=8\cdot 251+3$. Tātad k=251 un tas ir trešais skaitlis savā intervālā. Tātad $a_{2011}=251\cdot 30+11=$**7541**.

8.5. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka zēnu savstarpējo draudzību skaits ir $\frac{3N}{2}$. Tātad N ir pāra skaitlis.

Apskatīsim, kāds ir kopējais draudzības saišu skaits zēnu un meiteņu starpā: 7N=5M. Tātad mazākās N un M vērtības, kas der par uzdevuma atrisinājums, ir **N=10** un **M=14**.

Atliek parādīt piemēru, kā uzdevuma nosacījumus var realizēt.

Zēnu draudzību tabula:

zz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		+				+				+
2	+		+				+			
3		+		+				+		
4			+		+				+	
5				+		+				+
6	+				+		+			
7		+				+		+		
8			+				+		+	
9				+				+		+
10	+				+				+	

Meiteņu draudzību tabula:

mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1		+				+				+				+
2	+		+				+				+			
3		+		+				+				+		

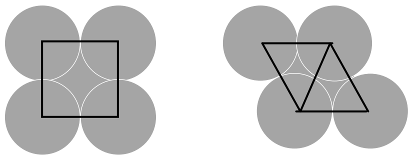
4			+		+				+				+	
5				+		+				+				+
6	+				+		+				+			
7		+				+		+				+		
8			+				+		+				+	
9				+				+		+				+
10	+				+				+		+			
11		+				+				+		+		
12			+				+				+		+	
13				+				+				+		+
14	+				+				+				+	

Zēni 1 - 5 draudzējas ar meitenēm 1 - 7, bet zēni 6 - 10 draudzējas ar meitenēm 8 - 14.

9.1. Izmantosim fomulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ un pērveidosim doto skaitli:
$2^{15}+3^{12}=(2^5)^3+(3^4)^3=(2^5+3^4)(2^{10}-2^5\cdot 3^4+3^8)$.
Tā kā abās iekavās izteiksmju vērtības ir naturāli skaitļi, kas lielāki nekā 1, dotais skaitlis nav pirmskaitlis.

9.2. a) Iekrāsoto figūru veido kvadrāts, kura virsotnes ir riņķu centros un malas garums ir 2, un četri riņķi, no kuriem izgriezta ceturtdaļa (skat. 6. zīm. a)). Tātad kopējais laukums ir $2^2+4\left(\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)=4+3\pi$.

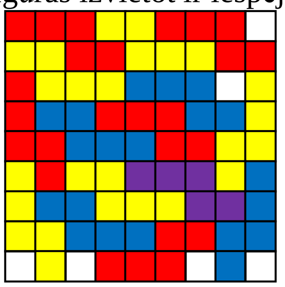
b) Iekrāsoto figūru veido divi vienādmalu trijstūri, kuru virsotnes ir riņķu centros un malas garums ir 2, divi riņķi, no kuriem izgriezta sestdaļa un divi riņķi, no kuriem izgriezta trešdaļa (skat. 6. zīm. b)). Tātad kopējais laukums ir $2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2+\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)+\left(\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{3}+3\pi$



a) b)

6. zīm.

9.3. Ievērosim, ka, ar dotajam figūrām pārklājot kvadrāta pirmās rindas rūtiņas, vismaz viena rūtiņa paliks nepārklāta. Tas pats attiecas uz kvadrāta pēdējo rindu. Tātad vismaz divas rūtiņas paliks nepārklātas. No tā secinām, ka kvadrātā 9×9 varēs izvietot ne vairāk kā 15 figūras, jo 16 figūru kopējais laukums ir 80. Tas, ka 15 figūras izvietot ir iespējams, parādīts 7. zīmējumā.



7. zīm.

9.4. Aprēķināsim nākamos virknes locekļus: 7, 14, 17, 20, 5, 8, 11, 5, 8, 11, ...

Kā redzams, sākot ar piekto virknes locekli, virknē atkārtojas skaitļu grupa „5, 8, 11”. Līdz ar to virknes 2011. loceklis būs tāds pats kā virknes 7. loceklis, t.i., **11**.

9.5. Lielākais labo rūtiņu skaits ir 8.

Vispirms pierādīsim, ka visas deviņas rūtiņas vienlaicīgi nevar būt labas. Tā kā visi skaitļi ir savā starpā atšķirīgi, tad kāds no tiem būs vismazākais, t.i., būs lielāks par 0 kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem.

8. zīmējumā parādīts, ka astoņas rūtiņas var būt labas (katrā rūtiņā iekavās ir norādīts šīs rūtiņas *svars*).

8(1)	**9**(3)	**7**(1)
3(1)	**1**(0)	**2**(1)
5(1)	**6**(3)	**4**(1)

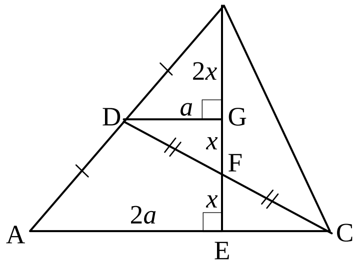
8 zīm.

10.1. Tā kā visu doto nevienādību abās pusēs ir pozitīvi skaitļi, varam visas četras nevienādības sareizināt. Tādējādi iegūstam, ka $x^2y^2z^2t^2 < xyzt$. Izdalot iegūtās nevienādības abas puses ar $xyzt>0$, iegūstam $xyzt < 1$, no kurienes seko, ka x, y, z, t visi reizē nevar būt lielāki vai vienādi ar 1.

10.2. No punkta D novelkam perpendikulu pret BE, apzīmējam DG=a (skat. 9. zīm.). DF=CF un ∠GFD=∠EFC, tāpēc taisnleņķa trijstūri DGF un EFC ir vienādi (pēc pazīmes „*kl*”). Vienādu trijstūru atbilstošie elementi ir vienādi, tātad GF=EF=x. No Talesa teorēmas seko $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DA}} = \frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{EG}} = 1$ un no līdzīgiem trijstūriem BDG un BAE seko, ka $\frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BA}} = \frac{1}{2}$. Tātad BG=EG=2$x$ un AE=2a.

Ja $\mathrm{S_{DGF}} = \mathrm{S_{EFC}} = \frac{ax}{2} = \mathrm{S}$, tad $\mathrm{S_{DGB}} = \frac{a \cdot 2x}{2} = 2\mathrm{S}$, $\mathrm{S_{BFC}} = \mathrm{S_{BDF}} = \frac{\mathrm{BF} \cdot \mathrm{DG}}{2} = \frac{3x \cdot a}{2} = 3\mathrm{S}$ (jo mediāna BF sadala trijstūri DBC divos vienlielos trijstūros), $\mathrm{S_{ABE}} = \frac{2a \cdot 4x}{2} = 8\mathrm{S}$, $\mathrm{S_{BEC}}=\mathrm{S_{BFC}}+\mathrm{S_{EFC}}=4\mathrm{S}$.

Tātad $\mathrm{S_{ABE}}=2\mathrm{S_{BEC}}$ k.b.j.



9. zīm.

10.3. Ja dotā vienādojuma saknes – katešu garumi – ir x_1 un x_2, tad trijstūra laukums ir $S = \frac{x_1x_2}{2}$.

Pēc Vjeta teorēmas $x_1x_2 = 113$, tātad $S = \frac{113}{2} = 56{,}5\ \mathrm{cm}^2$.

10.4. Atņemot no otrā vienādojuma pirmo, iegūstam $x(1-y) - z(1-y) = 1$ jeb $(1-y)(x-z) = 1$. Skaitli 1 kā divu veselu skaitļu reizinājumu var izteikt divos veidos: 1=1·1=(-1)·(-1).

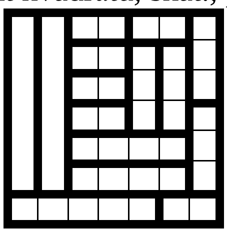
Tātad $\begin{cases} 1-y=1 \\ x-z=1 \end{cases}$ vai $\begin{cases} 1-y=-1 \\ x-z=-1 \end{cases}$.

Pirmajā gadījumā iegūstam y=0, ko, ievietojot dotajā sistēmā, iegūstam $\begin{cases} z=10 \\ x=11 \end{cases}$.

Otrajā gadījumā y=2 un $\begin{cases} 2x+z=10 \\ x+2z=11 \end{cases}$, no kurienes iegūst z=4 un x=3.

Tātad dotajai sistēmai veselos skaitļos ir divi atrisinājumi (11; 0; 10) un (3; 2; 4).

10.5. Ja lielākais strēmeļu kopgarums būtu 9, tad maksimālais dažādā garuma strēmeļu skaits būtu 1·7+1·6+1·5+2·4+3·3+4·2=43<49, tātad ar šo kopgarumu nepietiek, lai noklātu visu laukumu.
Ja lielākais strēmeļu kopgarums būtu 10 vai 11, tad maksimālais dažādā garuma strēmeļu skaits būtu 1·7+1·6+2·5+2·4+3·3+5·2=50. Lai dotais kvadrāts būtu sadalīts pilnībā, tad šāds dalījums neder, jo viena rūtiņa ir par daudz. Bet tas nozīmē, ka kādam garumam strēmeļu skaits ir mazāks par maksimāli iespējamo, bet šis liekais garums ir sadalīts starp cita garuma strēmelēm, tādejādi palielinot šīs grupas kopgarumu un pārsniedzot maksimāli pieļaujamo summu.
Tātad lielākais garantētais viena garuma strēmeļu kopgarums ir vismaz 12. Parādīsim, ka tas arī ir meklētais garums. Ja izvēlas strēmeles 2·6+1·5+2·4+4·3+6·2, tad viena garuma strēmeļu kopgarums ir ne vairāk kā 12. Kā salikt kvadrātu, skat., piem., 10. zīm.:



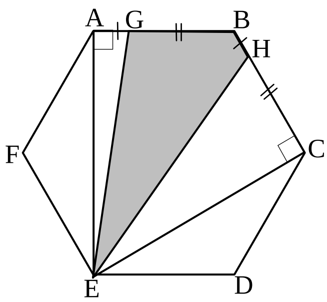
10. zīm.

11.1. Ievērosim, ka $(5a+b)=11(a+b)-2(3a+5b)$. Labās puses katrs saskaitāmais dalās ar 11, tātad arī kreisās puses izteiksmei jādalās ar 11, k.b.j.

11.2. Apzīmēsim sešstūra malas garumu ar a, AE=EC=h, AE⊥AB, EC⊥BC (skat. 11. zīm.). Tad

$$S_{EGBH}=S_{EGB}+S_{EBH}=\frac{1}{2}(GB\cdot EA+BH\cdot EC)=\frac{1}{2}(h\cdot GB+h\cdot BH)=\frac{1}{2}h(GB+BH)=\frac{1}{2}ha.$$

$h=\sqrt{3}a$, tātad $S_{EGBH}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. $S_{ABCDEF}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$, tātad $S_{EGBH}=\frac{S_{ABCDEF}}{3}$.



11. zīm.

11.3. Ja $\frac{a^2+a-1}{2a+1}$ ir vesels skaitlis, tad arī $\frac{4(a^2+a-1)}{2a+1}=\frac{4a^2+4a-4}{2a+1}$ ir vesels skaitlis. Bet $\frac{4a^2+4a-4}{2a+1}=\frac{(4a^2+4a+1)-5}{2a+1}=\frac{(2a+1)^2-5}{2a+1}=2a+1-\frac{5}{2a+1}$. Tātad 5 dalās ar $2a+1$, bet 5 dalās tikai ar ±1 un ±5. Tātad

$2a+1=5 \Rightarrow a=2$,
$2a+1=1 \Rightarrow a=0$,
$2a+1=-1 \Rightarrow a=-1$,
$2a+1=-5 \Rightarrow a=-3$.

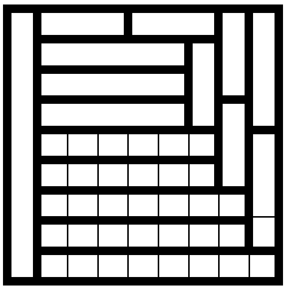
Tātad, veicot pārbaudi, iegūstam, ka iespējamās a vērtības ir **-3, -1, 0 un 2**.

11.4. Ievērosim, ka skaitļus a_n var uzdot ar formulu $a_n=\frac{2^n-(-1)^n}{3}$.

Pārbaude: $a_1=\frac{2^1-(-1)^1}{3}=1$, $a_2=\frac{2^2-(-1)^2}{3}=1$. Formulas $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ pareizība izriet no tā, ka $2^{n+2}=2^{n+1}+2\cdot 2^n$ un $(-1)^{n+2}=(-1)^{n+1}+2(-1)^n$.

Ja n ir nepāra skaitlis, tad $3a_n=2^n+1>2^n$. Savukārt, ja n ir pāra skaitlis, tad $3a_n=2^n-1<2^n$.
Tātad 1) gadījumā nevienādība ir patiesa, bet 2) – aplama.

11.5. Ja lielākais strēmeļu kopgarums būtu 14, tad maksimālais dažādā garuma strēmeļu skaits būtu $1\cdot9+1\cdot8+2\cdot7+2\cdot6+2\cdot5+3\cdot4+4\cdot3=77<81$, tātad ar šo kopgarumu nepietiek, lai noklātu visu laukumu.
Tātad lielākais garantētais viena garuma strēmeļu kopgarums ir vismaz 15. Parādīsim, ka tas arī ir meklētais garums. Ja izvēlas strēmeles $1\cdot9+1\cdot8+2\cdot7+2\cdot6+3\cdot5+2\cdot4+5\cdot3$, tad viena garuma strēmeļu kopgarums ir ne vairāk kā 15. Šādās strēmelēs kvadrātu var sadalīt (skat. 12. zīm.).



12. zīm.

12.1. Kvadrātvienādojumu apzīmēsim ar V_1 un otru vienādojumu – ar V_2.

Ja $a=0$, tad V_1 ir lineārs vienādojums ar vienu sakni $x=\frac{1}{2}$ un V_2 arī ir viena sakne $x=1$.

Ja $a\neq0$, tad V_1 ir kvadrātvienādojums, kura sakņu skaits ir atkarīgs no diskriminanta $D=4-4a=4(1-a)$ vērtības, savukārt V_2 ir 0 vai 1 sakne.

Ja $a<1$ un $a\neq0$, tad V_1 ir 2 saknes, bet V_2 ir mazāk nekā 2 saknes, tātad sakņu skaits atšķiras.
Ja $a=1$, tad V_1 ir 1 sakne un V_2 arī ir viena sakne, jo $\cos 1\neq 0$.
Ja $a>1$, tad $D<0$ un V_1 sakņu nav. Vienādojuma V_2 sakņu nav, kad $\cos a=0$. Ja $a>1$ un $\cos a=0$, tad $a=\frac{\pi(2k-1)}{2}$, $k\in\mathbf{N}$.

Atbilde: meklētās a vērtības ir 0, 1 un $\frac{\pi(2k-1)}{2}$, $k\in\mathbf{N}$.

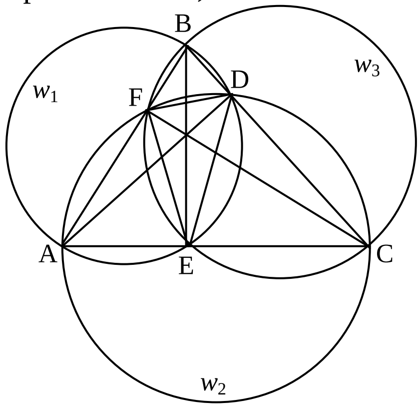
12.2. Uz katras trijstūra malas kā diametra konstruēsim riņķa līniju (skat. 13. zīm.). Apzīmēsim riņķa līniju, kuras diametrs ir AB ar w_1, riņķa līniju, kuras diametrs ir AC, – ar w_2 un to, kuras diametrs ir BC, – ar w_3. Šīs riņķa līnijas katra iet caur attiecīgās malas galapunktiem un caur to augstumu pamatiem, kas atrodas uz divām pārējām malām, t.i., w_1 iet caur punktiem A, B, D un E; w_2 – caur A, C, D un F, bet w_3 – caur B, C, E un F.

∠DBE=∠DAE (ievilktie leņķi, kas balstās uz loku DE riņķa līnijā w_1). Līdzīgi ∠DAC=∠DFC (r.l. w_2) un ∠CBE=∠CFE (r.l. w_3).

No šīm sakarībām un ievērojot, ka ∠CBE=∠DBE un ∠DAE=∠DAC, un iegūstam, ka ∠DFC=∠CFE – tātad FC ir ∠DFE bisektrise.

Līdzīgi ∠DAF = ∠DCF (no w_2), ∠BAD = ∠BED (no w_1) un ∠BCF = ∠BEF (r.l. w_3). Ievērojot, ka ∠DAF=∠ BAD un ∠BCF=∠DCF, iegūstam, ka ∠BEF=∠BED, jeb EB ir ∠DEF bisektrise.

Tā kā FC un EB krustojas vienā punktā ar DA, tad arī DA ir ∠EDF bisektrise.



13. zīm.

12.3. Pārveidosim dotos vienādojumus:

$$\begin{cases} 3(x^2 - y^2) + 4(x^2 + z^2) = 8 \\ 7(x^2 - y^2) + 9(x^2 + z^2) = -3 \end{cases}$$

No tā iegūstam

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 65 \\ x^2 - y^2 = -84 \end{cases}$$

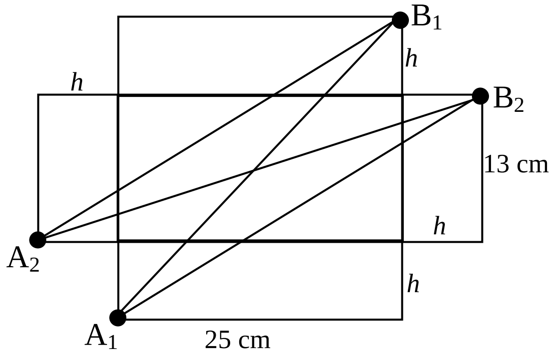
Tā kā x, y un z ir naturāli skaitļi, apskatām pirmā vienādojuma iespējamos atrisinājumus, attiecīgi no otra vienādojuma aprēķinot arī y.

Aplūkosim, vai katrā no šiem gadījumiem atrisinājums ir arī otrajam vienādojumam:

x^2	z^2	y^2
1	64	85 ⇒ y nav naturāls skaitlis
16	**49**	**100**
49	16	133 ⇒ y nav naturāls skaitlis
64	1	148 ⇒ y nav naturāls skaitlis

Tātad $x^2 + y^2 + z^2 = 165$.

12.4. Ja skudra virzās tikai pa zemi apkārt klucim, tad īsākais ceļš no A līdz B ir s=13+25=38 cm. Ja skudra neizmanto augšējo skaldni, tad tas arī ir īsākais ceļš. Aplūkosim, kas notiek, ja augšējā skaldne **tiek** izmantota. Apskatīsim kluča virsmas izklājumu bez apakšējās skaldnes. Izklājumā punktiem A un B atbilst pa diviem punktiem, attiecīgi A_1 un A_2, B_1 un B_2.Tādā gadījumā īsākais varētu būt viens no variantiem: A_1B_1, A_1B_2=A_2B_1, A_2B_2 (skat.14. zīm.).



14. zīm.

$A_1B_1^{\ 2} = 25^2 + (13 + 2h)^2$, $A_1B_2^{\ 2} = A_2B_1^{\ 2} = (25 + h)^2 + (13 + h)^2$, $A_2B_2^{\ 2} = (25 + 2h)^2 + 13^2$

a) Ja h=7 cm, tad $A_1B_1^{\ 2} = 25^2 + 27^2 = 1354$, $A_1B_2^{\ 2} = A_2B_1^{\ 2} = 32^2 + 20^2 = 1424$, $A_2B_2^{\ 2} = 39^2 + 13^2 > 38^2$, $s^2 = 38^2 = 1444$, tātad īsākais ceļš ir $A_1B_1 = \sqrt{1354}$ cm.

b) Ja h=13 cm, tad $A_1B_1^{\ 2} = 25^2 + 39^2 > 38^2$, $A_1B_2^{\ 2} = A_2B_1^{\ 2} = 38^2 + 26^2 > 38^2$, $A_2B_2^{\ 2} = 51^2 + 13^2 > 38^2$, tātad īsākais ceļš ir 38 cm, ejot apkārt klucim pa zemi.

12.5. Sadalīsim visus skaitļus pa pāriem tā, ka katra pāra reizinājums ir 48: {1, 48}, {2, 24}, {3, 16}, {4, 12}, {6, 8}.

Ja meitenes izvēlas divus pilnus pārus, tad četru skaitļu reizinājums ir 48^2=2304 un konfektes šajos gadījumos saņem Dace. Divus pilnus pārus var izvēlēties $C_5^2 = 10$ veidos.

Ja skaitļi tiek izvēlēti tā, ka nav paņemti divi pilni pāri, tad katram četru skaitļu komplektam $\{a, b, c, d\}$ varam piekārtot citu četru skaitļu komplektu $\left\{\frac{48}{a}, \frac{48}{b}, \frac{48}{c}, \frac{48}{d}\right\}$. Tā kā nav izvēlēti divi pilni pāri, tad abi šie četrinieki ir atšķirīgi.

Aplūkosim šos komplektus pa pāriem kopā. Šo divu komplektu skaitļu reizinājums ir 48^4. Tātad abu komplektu skaitļu reizinājums vienlaicīgi nevar būt mazāks nekā 2012 (jo $2012^2<48^4$). Tas nozīmē, ka pēc šo divu komplektu skaitļu reizinājumu aprēķināšanas vai nu abas meitenes saņems pa konfektei, vai arī abas konfektes saņems Dace. Tāpēc arī beigās Dacei būs vairāk konfekšu nekā Laurai.