LU A.Liepas Neklātienes matemātikas skola

2011./2012.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

Katra metodiskā apvienība pati nolemj, vai un kad tā rīkos vai nerīkos šādu olimpiādi un, ja rīkos, tad cik un kurus no piedāvātajiem uzdevumiem izmantos. Uzdevumus var arī daļēji mainīt, pārcelt no vienas klašu grupas uz citu, izmantot skolas olimpiādēs, pulciņu darbā utt. **Rekomendējamais olimpiādes datums ir 25. novembris. Rīkot olimpiādi vai izmantot šeit piedāvātos uzdevumus citā veidā darbā ar skolēniem agrāk par šo datumu nedrīkst.**

Atsauksmes un ierosinājumus lūdzam sūtīt

- pa parasto pastu uz adresi:

A.Liepas NMS. SO

Fizikas un matemātikas fakultāte

Latvijas Universitāte

Rīgā, Zeļļu ielā 8

LV-1002

- vai pa elektronisko pastu uz adresi:

nms@lu.lv

Veiksmi Jums un Jūsu skolēniem!

LU A.Liepas NMS

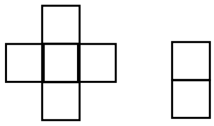
2011./2012.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

5. klase

1. Atrast mazāko naturālo skaitli, kura ciparu reizinājums ir lielāks vai vienāds ar 2012 un kura visi cipari ir dažādi.

2. Mūzikas akadēmijas absolventi katrs māk spēlēt vismaz vienu mūzikas instrumentu – klavieres, vijoli vai bungas. Zināms, ka klavieres māk spēlēt 37, vijoli – 30, bet bungas – 43 absolventi. Tikai vienu mūzikas instrumentu māk spēlēt 32 absolventi. Tieši divus mūzikas instrumentus māk spēlēt 33 absolventi. Cik absolventi māk spēlēt visus trīs mūzikas instrumentus?

3. Atrast kvadrātu, ko var salikt no 1. zīmējumā parādītajām figūriņām. Jāizmanto vismaz viena katra veida figūriņa. Kvadrātam jābūt noklātam pilnībā un figūriņas nedrīkst pārklāties.
Parādīt zīmējumā, kā to var izdarīt.



1. zīm.

4. Vienā gadā bija tikpat trešdienu, cik piektdienu. Vai noteikti šajā gadā bija arī tikpat ceturtdienu? Vai atbilde ir atkarīga no tā, vai gads ir īsais vai garais?

5. Aizmežu tirgū tirdzniecība notiek izmantojot 1, 2, 5, 10 un 20 santīmu monētas, pie tam katras preces pirkšanas/pārdošanas laikā ir jāizmanto **tieši trīs monētas, starp kurām nav divu vienādu**. (Piemēram, ja prece maksā 17 santīmus, tad to var nopirkt vai nu samaksājot ar 10, 5 un 2 santīmu monētām, vai arī maksājot ar 20 santīmu monētu, atlikumā saņemot 1 un 2 santīmu monētas, vai arī maksājot ar 20 un 2 santīmu monētām, atlikumā saņemot 5 santīmu monētu.) Katra prece maksā veselu skaitu santīmu, ko ir iespējams samaksāt iepriekš aprakstītajā veidā. Piemēram, neviena prece nemaksā 1 santīmu (jo tās pirkšanas procesā nevar izmantot tieši trīs dažādas vērtības monētas).
Kāda ir nākamā mazākā cena, ko nav iespējams samaksāt pēc Aizmežu tirgus likumiem?

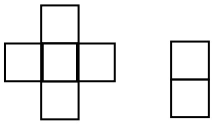
2011./2012.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

6. klase

1. Cik ir tādu naturālu skaitļu, kuru decimālā pieraksta ciparu reizinājums ir 20, bet summa 11?

2. Par *palindromu* sauc naturālu skaitli, kas vienādi lasāms no abiem galiem. Piemēram, 5, 313 un 4482844 ir *palindromi*, bet 17, 3313 – nav.
Visi septiņciparu *palindromi* sakārtoti augošā secībā. Noteikt, kurš *palindroms* šajā rindā pēc kārtas ir 2011-ais?

3. Atrast taisnstūri, ko var salikt no 2. zīmējumā parādītajām figūriņām. Jāizmanto vismaz viena katra veida figūriņa. Taisnstūrim jābūt noklātam pilnībā un figūriņas nedrīkst pārklāties.
Parādīt zīmējumā, kā to var izdarīt.



2. zīm.

4. Piecstūra un sešstūra malu garumi centimetros ir pēc kārtas sekojoši naturāli skaitļi. Zināms, ka abu daudzstūru perimetri ir vienādi un piecstūra īsākās malas garums ir vienāds ar sešstūra garākās malas garumu. Kāds ir sešstūra īsākās malas garums?

5. Dotas četras dārglietu lādītes, kas katra nokrāsota citā krāsā. Zināms, ka vienā no lādītēm atrodas dimants. Uz katras no lādītēm ir uzrakstīts viens apgalvojums:
uz sarkanās lādītes: „Dimants atrodas šajā lādītē”;
uz dzeltenās: „Dimants atrodas vai nu sarkanajā vai brūnajā lādītē”;
uz zaļās: „Dimants neatrodas šajā lādītē”;
uz brūnās: „Dimants neatrodas sarkanajā lādītē”.
Noteikt, kurā no lādītēm atrodas dimants, ja tikai viens no šiem apgalvojumiem ir patiess.

2011./2012.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

7. klase

1. Apskatām vienādojumu $ax+b=cx+d$, kur *a*, *b*, *c*, *d* katrs ir ar vērtību 1, 2 vai 3.
a) Uzrādīt vienu no šādiem vienādojumiem, kuram ir sakne 0.
b) Uzrādīt vienu no šādiem vienādojumiem, kuram nav sakņu.
c) Cik starp šiem vienādojumiem ir tādu, kuriem nav sakņu?

2. Zināms, ka nekādas trīs no dotajam taisnēm nekrustojas viena punktā, bet katras divas savā starpā krustojas. Cik dažādu krustpunktu rodas, ja pavisam ir uzzīmētas:
a) 5 taisnes,
b) 2011 taisnes?

3. Dota virkne $u_1, u_2, \ldots$, kur $u_1 = u_2 = 1$ un katrs nākamais virknes loceklis, sākot ar trešo, ir visu iepriekšējo virknes locekļu kvadrātu summa. Vai u_{2011} dalās ar 7?

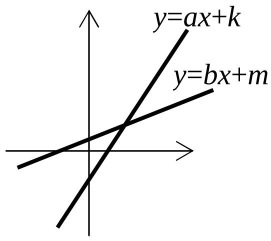
4. Vienādmalu trijstūra, kura malas garums ir 2 cm, iekšpusē atzīmēti pieci sarkani punkti. Pierādīt, ka var izvēlēties divus tādus sarkanos punktus, attālums starp kuriem nepārsniedz 1 cm.

5. Dotas sešas pēc kārtas novietotas rūtiņas. Jānis un Pēteris spēlē sekojošu spēli. Viena gājiena laikā vienā no tukšajām rūtiņām jāieraksta viens cipars. Gājienus spēlētāji izdara pēc kārtas, Jānis sāk.
Pēteris uzvar, ja sešciparu skaitlis, kas izveidojas beigās, dalās ar 13. Vai Pēteris vienmēr var uzvarēt, neatkarīgi no tā, kā spēlē Jānis?

2011./2012.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

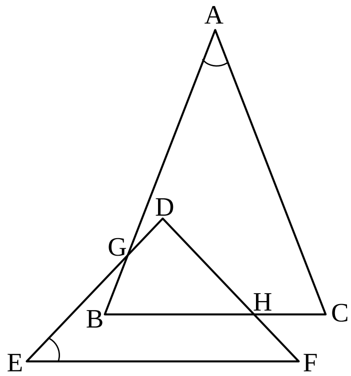
8. klase

1. Koordinātu plaknē konstruēti funkciju $y = ax + k$ un $y = bx + m$ grafiki (skat. 3. zīm.). Pierādīt, ka $(b - a)(k - m) > 0$.



3. zīm.

2. Divi vienādsānu trīsstūri ABC (AB=AC) un DEF (DE=DF) savstarpēji novietoti tā, kā redzams 4. zīmējumā. Zināms, ka BC||EF un ∠BAC=∠DEF=32°. Aprēķināt leņķa AGE lielumu!



4. zīm.

3. Skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir visi naturālie skaitļi no 1 līdz n kaut kādā secībā. Pierādīt: ja n ir nepāra skaitlis, tad reizinājums $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_n - n)$ vienmēr ir pāra skaitlis.

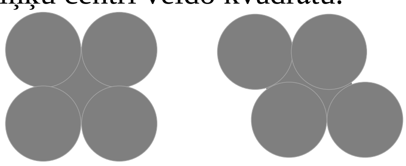
4. Augošas naturālu skaitļu virknes 1, 7, 11, 13,... locekļi ir visi tie skaitļi, kas nedalās ne ar 2, ne ar 3, ne ar 5. Atrast, kāds skaitlis atrodas šīs virknes 2011. vietā.

5. Draugu portālā ir reģistrējušies N zēni un M meitenes. Katrs zēns draudzējas ar trīs citiem zēniem un septiņām meitenēm, bet katra meitene – ar četrām citām meitenēm un pieciem zēniem. Kādas ir mazākās iespējamās N un M vērtības?

9. klase

1. Pierādīt, ka skaitlis $2^{15}+3^{12}$ nav pirmskaitlis.

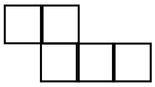
2. Aprēķināt 5. zīmējumā doto figūru laukumus. Visi zīmējumos attēlotie riņķi ir vienādi un to rādiuss ir 1. a) gadījumā riņķu centri veido kvadrātu.



a) b)

5. zīm.

3. Kādu lielāko daudzumu 6. zīmējumā attēloto figūriņu var izgriezt no kvadrāta ar izmēriem 9 × 9 rūtiņas? Griezumus drīkst izdarīt tikai pa rūtiņu līnijām. Figūriņas drīkst pagriezt vai apgāzt „uz mutes”.



6. zīm.

4. Naturālu skaitļu virknes 7, 14, 17, ... katrs nākamais loceklis tiek iegūts iepriekšējā locekļa kvadrāta ciparu summai pieskaitot 1. Kāds ir šīs virknes 2011. loceklis?

5. Kvadrātā ar izmēriem 3×3 rūtiņas katrā rūtiņā ierakstīts naturāls skaitlis. Katrā rūtiņā ierakstīto skaitli *a* salīdzina ar tās kaimiņu rūtiņās ierakstītajiem skaitļiem, un nosaka, par cik no tiem *a* ir lielāks, šo skaitu sauksim par rūtiņas *svaru*. Rūtiņu sauksim par labu, ja tās svars ir nepāra skaitlis. Kāds ir lielākais iespējamais labo rūtiņu skaits?
(Divas rūtiņas sauc par kaimiņu rūtiņām, ja tām ir kopīga mala.)

10.klase

1. Dots, ka *x*, *y*, *z*, *t* ir pozitīvi skaitļi un $x^2 < y$, $y^2 < z$, $z^2 < t$ un $t^2 < x$. Pierādīt, ka vismaz viens no skaitļiem *x*, *y*, *z*, *t* ir mazāks nekā 1.

2. Šaurleņķu trijstūrī ABC uz malas AB atzīmēts tās viduspunkts D. No virsotnes B pret malu AC vilktais augstums BE krusto mediānu CD tās viduspunktā. Pierādīt, ka $S_{ABE}=2S_{BEC}$.

3. Vienādojuma $x^2 - 27x + 113 = 0$ saknes ir taisnleņķa trijstūra katešu garumi, izteikti centimetros. Aprēķināt šī trijstūra laukumu!

4. Atrisināt vienādojumu sistēmu veselos skaitļos

$$\begin{cases} xy + z = 10 \\ x + yz = 11 \end{cases}.$$

5. Pukstiņš un Svirpulnieks spēlē šādu spēli: vispirms Pukstiņš sadala 7×7 rūtiņas lielu kvadrātu vienu rūtiņu platās un vismaz divas rūtiņas garās strēmelēs. Pēc tam Svirpulnieks aplūko sadalīto kvadrātu un nosauc skaitli *k* ($2 \le k \le 7$) un paņem visas strēmeles, kuru garums ir *k*.

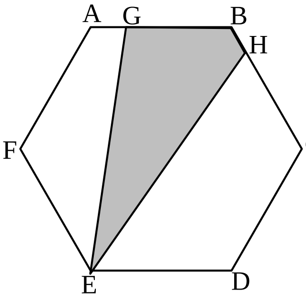
Atrast lielāko strēmeļu kopgarumu, kuru Svirpulnieks var paņemt, neatkarīgi no tā, kā laukumu sagriezīs Pukstiņš.

2011./2012.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

11. klase

1. Doti tādi veseli skaitļi *a* un *b*, ka $3a+5b$ dalās ar 11. Pierādīt, ka skaitlis $5a+b$ arī dalās ar 11.

2. Uz regulāra sešstūra ABCDEF malas AB atlikts punkts G, bet uz malas BC punkts H tā, ka AG=BH (skat. 7. zīm.). Pierādīt, ka $S_{EGBH} = \frac{S_{ABCDEF}}{3}$.



7. zīm.

3. Zināms, ka *a* un $\frac{a^2+a-1}{2a+1}$ ir veseli skaitļi. Atrast visas iespējamās *a* vērtības!

4. Dota virkne $a_1, a_2, \ldots$, kur $a_1 = a_2 = 1$ un $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, $n \geq 1$.

Vai nevienādība $a_n > \frac{2^n}{3}$ ir patiesa, ja 1) $n = 2011$; 2) $n = 2012$?

5. Pukstiņš un Svirpulnieks spēlē šādu spēli: vispirms Pukstiņš sadala 9×9 rūtiņas lielu kvadrātu vienu rūtiņu platās un vismaz trīs rūtiņas garās strēmelēs. Pēc tam Svirpulnieks aplūko sadalīto kvadrātu un nosauc skaitli *k* (3≤*k*≤9) un paņem visas strēmeles, kuru garums ir *k*. Atrast lielāko strēmeļu kopgarumu, kuru Svirpulnieks var paņemt, neatkarīgi no tā, kā laukumu sagriezīs Pukstiņš!

2011./2012.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

12.klase

1. Kādām reālām parametra *a* vērtībām vienādojumiem

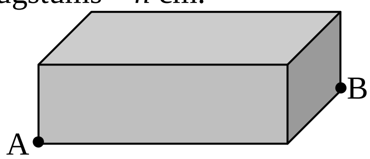
$$ax^2 - 2x + 1 = 0 \text{ un } x \cdot \cos a = 1$$

ir vienāds sakņu skaits?

2. Šaurleņķu trijstūrī ABC augstumi ir AD, BE un CF. Pierādīt, ka DA, EB un FC ir trijstūra DEF bisektrises.

3. Zināms, ka *x*, *y* un *z* ir naturāli skaitļi, $7x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 8$ un $16x^2 - 7y^2 + 9z^2 = -3$. Kāda ir $x^2 + y^2 + z^2$ vērtība?

4. Uz gludas grīdas nolikts taisnstūra paralēlskaldņa formas dzelzsbetona klucis, kura pamata izmēri ir 13 cm×25 cm, bet augstums – *h* cm.



8. zīm.

Skudra atrodas punktā A (skat. 8. zīm.) un viņai jānonāk punktā B. Skudra var iet gan apkārt klucim, gan pāri, bet nevar izlīst pa apakšu.

Noteikt, kāds ir īsākā ceļa no punkta A uz punktu B garums, ja **a)** *h*=7 cm, **b)** *h*=13 cm.

5. Laura un Dace no naturālu skaitļu kopas A={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48} visos iespējamos veidos izvēlas četrus dažādus skaitļus un aprēķina to reizinājumu. Ja reizinājums ir mazāks nekā 2012, Laura saņem vienu konfekti, bet, ja lielāks, tad konfekti saņem Dace. Kurai no meitenēm beigās būs vairāk konfekšu?