MĀJAS DARBA ATRISINĀJUMI

1. uzdevums.

Trušu audzētavai uzbrūk kaut kāda jauna slimība, kura padara trušus koši rozā un ļoti mīļus. Izmantojot doto *SIR* modeli, aprēķini, kāds būs vēl veselo, inficēto un izveseļojušos trušu skaits pēc 5 dienām (t. i., kad $t = 5$), ja zināms, ka visa populācija var saslimt, sākumā no visiem 100 trušiem ir inficēts tikai viens trusis (t. i., $I_0 = 1$; $S_0 = N - I_0$). Inficēšanās ātrums $\beta = 1{,}5$; izveseļošanās ātrums $\gamma = 0{,}5$.

Epidēmijas gaitu (veselo, inficēto un izveseļojušos skaitu ik pa dienai) apraksta *SIR* modeļa vienādojumi:

$$S_{t+1} = S_t - \beta \frac{S_t I_t}{N};$$

$$I_{t+1} = I_t + \beta \frac{S_t I_t}{N} - \gamma I_t;$$

$$R_{t+1} = R_t + \gamma I_t.$$

Piezīme. Aprēķinos un atbildē ņem vērā vismaz 3 ciparus aiz komata, citādi truši būs bēdīgi.

Atrisinājums.

Šo uzdevumu varēja risināt gan *ar roku*, pakāpeniski, gan dotos vienādojumus ierakstot, piemēram, M/S Excel:

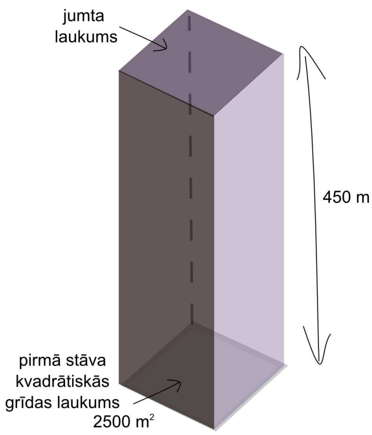
	A	B	C	D	E	F
1	β=	1,5				
2	γ=	0,5				
3	N=	100				
4						
5	S_0=$B$3-E5=	99		I_0=	1	
6	S_1=B5-$B$1*B5*E5/$B$3=	97,515		I_1=E5+$B$1*B5*E5/$B$3-$B$2*E5=	1,985	
7	S_2=B6-$B$1*B6*E6/$B$3=	94,61149088		I_2=E6+$B$1*B6*E6/$B$3-$B$2*E6=	3,896009125	
8	S_3=B7-$B$1*B7*E7/$B$3=	89,0823824		I_3=E7+$B$1*B7*E7/$B$3-$B$2*E7=	7,477113039	
9	S_4=B8-$B$1*B8*E8/$B$3=	79,09119675		I_4=E8+$B$1*B8*E8/$B$3-$B$2*E8=	13,72974216	
10	S_5=B9-$B$1*B9*E9/$B$3=	62,80267067		I_5=E9+$B$1*B9*E9/$B$3-$B$2*E9=	23,15339717	
11						
12	R_0=	0				
13	R_1=B12+$B$2*E5=	0,5				
14	R_2=B13+$B$2*E6=	1,4925				
15	R_3=B14+$B$2*E7=	3,440504563				
16	R_4=B15+$B$2*E8=	7,179061082				
17	R_5=B16+$B$2*E9=	14,04393216				
18						

Tātad pēc piecām dienām

a) vēl veselo trušu skaits būs aptuveni 62,803;
b) inficēto trušu skaits būs aptuveni 23,153;
c) izveseļojušos trušu skaits būs aptuveni 14,044.

2. uzdevums.

Pieņemot, ka Zeme ir lode, ir skaidrs – ja augstu māju sienas ir vertikālas (perpendikulāras Zemei), tās nevar būt paralēlas. Par cik atšķiras debesskrāpja, kura pamats ir kvadrāts (skat. zīmējumu), pirmā stāva un plakanā jumta laukumi, ja zināms, ka debesskrāpis ir 450 m augsts un pirmā stāva grīdas laukums ir 2500 m^2.

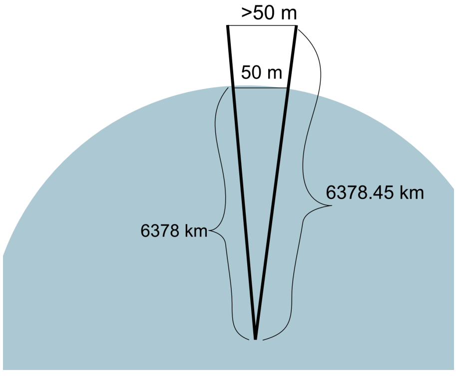


Atrisinājums.

Vispirms atrod Zemes rādiusu, dažādos avotos tas, protams, var atšķirties. Šajā atrisinājumā izmantoti dati par ekvatoriālo rādiusu (~6378 km).

Tā kā pirmā stāva grīdai ir kvadrāta forma, un tās laukums ir 2500 m^2, tad tās visu malu garumi ir 50 m.

Tālāk, balstoties uz apsvērumiem, ka māju grīdas ir gludas, taisnas un nolīmeņotas, grīdas malu garumi 50 m ir salīdzinoši nelieli u.tml., varam visu problēmu aprakstīt ar nelielu ilustrējošu zīmējumu (proporcijas nav ievērotas):



Izmantojot līdzīgus trijstūrus, atrodam, ka jumta laukuma mala ir $a = \dfrac{50 \cdot 6378{,}45}{6378} = 50{,}00352775\ \text{m}$ gara, līdz ar to laukumi atšķirsies par 0,352788 m^2.

3. uzdevums.

Zināms, ka daudzi procesi dabā pakļaujas normālajam sadalījumam. Izrādās, ka arī daudzus stohastiskus procesus var aprakstīt ar Brauna kustības stohastisko procesu. Sameklēt datu piemēru, kas apraksta akciju cenas vai kādu valūtu kursu. Izvēloties periodu vismaz 3 vai 4 mēnešus, kur aplūkoti dienu dati (piemēram, vidējā cena konkrētajā dienā), konstruēt histogrammu procesa pieaugumiem un pārbaudīt, vai tie varētu būt normāli sadalīti. Ieteicams, izvēlēties datus skaitā vismaz 100. Kāda aptuveni sanāk matemātiskā cerība μ (kā vidēji uzvedas pieaugumi)? ***Nav obligāti***, bet var mēģināt novērtēt arī dispersijas parametru σ^2, ja tas ir proporcionāls procesa pieaugumu laika starpībai, tad Brauna kustības modelis varētu būt atbilstošs.

Atrisinājums.

Šajā uzdevumā bija brīvi jāizvēlas dati un tie jāanalizē, tāpēc tam nav konkrēta atrisinājuma.

4. uzdevums.

Gadījuma klejošana (skatīt definīciju prezentācijā) tiek uzsākta punktā (0; 7). Pirmajā solī ar varbūtību 0,5 iespējams nonākt punktā (1; 6) un ar tādu pašu varbūtību ir iespēja nonākt punktā (1; 8). Kāda varbūtība piektajā solī nonākt punktā (5; 12)? Atrast varbūtības piektajā solī nonākt punktos (5; 2), (5; 4), (5; 6), (5; 8), (5; 10)? Aprēķināt bankrotēšanas varbūtību prezentācijā apskatītajā gadījuma klejošanas piemērā par spēli ar monētām (kas tika izspēlēta nodarbības laikā) pēc 20 soļiem (20 monētas mešanas reizēm).

Atrisinājums.

Izveidosim sekojošu tabulu un aizpildīsim to ar notikuma A, *i*-tajā solī nonākt punktā (*i*; *y*), varbūtībām.

y koord. / *Soļu sk.*	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{2}{4}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{6}{16}$		$\frac{4}{16}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{10}{32}$		$\frac{10}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

Redzam, ka

1) ar varbūtību 1 nultajā solī atradīsimies punktā (0;7);
2) ar varbūtību $\frac{1}{2}$ pirmajā solī atradīsimies punktā (1;6);
3) ar varbūtību $\frac{1}{2}$ pirmajā solī atradīsimies punktā (1;8).

Kā veidojas šīs varbūtības? Punktā (4; 9) varam nonākt tikai tad, ja 3. solī atradāmies punktā (3; 8) vai (3; 10), tātad daļas skaitītājs būs abu iepriekšējo summa, t.i., $4 = 3 + 1$. Saucējs ir divnieka pakāpe – 2^i.

Varbūtība 5. solī nonākt punktā (5;12) ir $\frac{1}{32}$.

Varbūtība 5. solī nonākt punktā (5;2) ir $\frac{1}{32}$.

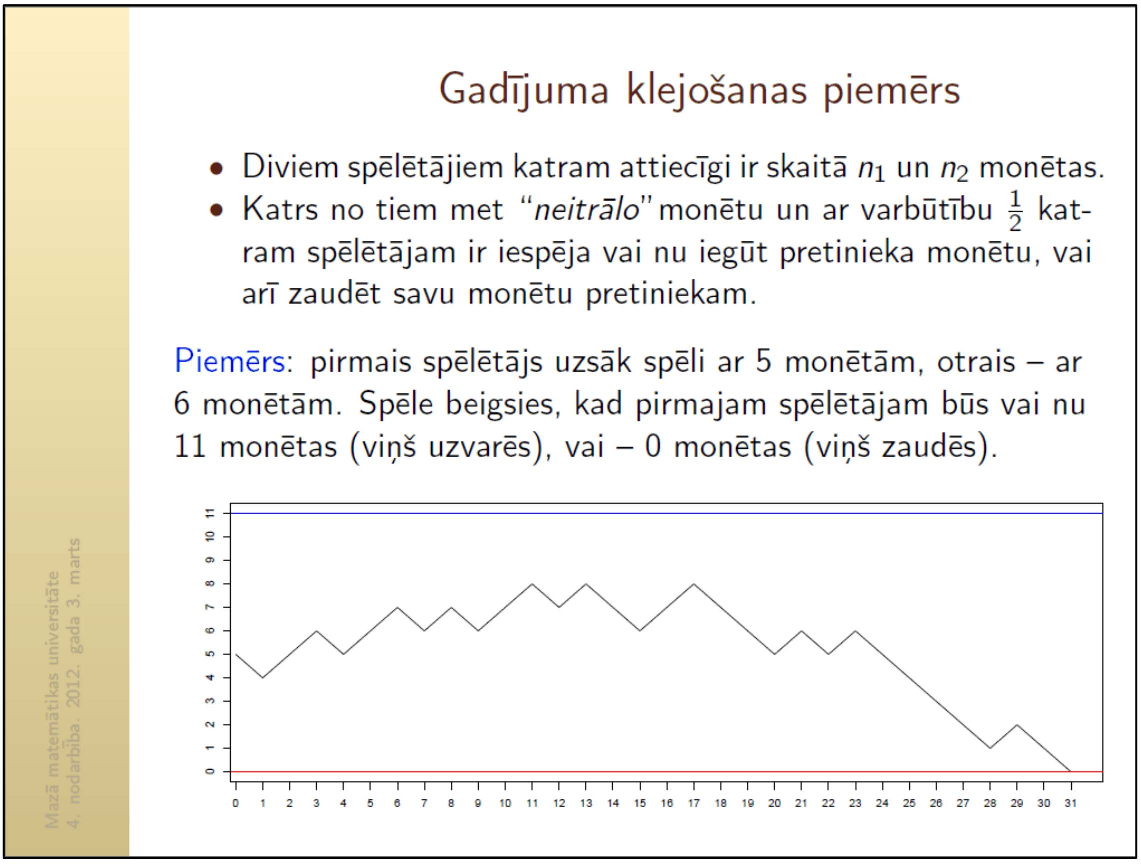
Varbūtība 5. solī nonākt punktā (5;4) ir $\frac{5}{32}$.

Varbūtība 5. solī nonākt punktā (5;6) ir $\frac{10}{32}$.

Varbūtība 5. solī nonākt punktā (5;8) ir $\frac{10}{32}$.

Varbūtība 5. solī nonākt punktā (5;10) ir $\frac{5}{32}$.

Atrisinājums par bankrotēšanas varbūtību prezentācijā apskatītajā gadījuma klejošanas piemērā par spēli ar monētām.



Kā redzams no attēla, sākot no punkta ar koordinātēm (0;7), vienmēr ir stāvokļi, kuros gadījuma klejošana nevar nokļūt (piemēram, (1;7), (2;6), (2;8) utt.). Ja spēle tiek sākta ar 5 monētām, tad sākuma stāvoklis ir punkts (0;5). Viegli pārliecināties, ka no šī punkta nonākt punktā (20;0), kas ir bankrotēšanas stāvoklis, var tikai pēc nepāra skaita soļu. Tātad varbūtība bankrotēt pēc 20 soļiem ir 0.