Otrdiena, 2014. gada 8. jūlijs

1. uzdevums. Dota bezgalīga veselu pozitīvu skaitļu virkne $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$. Pierādīt, ka eksistē tieši viens tāds vesels skaitlis $n \geq 1$, ka

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

2. uzdevums. Dots vesels skaitlis $n \geq 2$. Aplūkojam $n \times n$ šaha galdiņu, kas sastāv no n^2 vienības rūtiņām. Konfigurāciju no n torņiem sauksim par *miermīlīgu*, ja katrā rindiņā un katrā kolonnā atrodas tieši viens tornis. Atrast lielāko pozitīvu veselu skaitli k tādu, ka katrai miermīlīgai konfigurācijai no n torņiem eksistē $k \times k$ kvadrāts, kas nesatur torni nevienā no savām k^2 vienības rūtiņām.

3. uzdevums. Izliektam četrstūrim $ABCD$ izpildās $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Punkts H ir pamats perpendikulam, kas vilkts no A pret BD. Punkti S un T pieder malām AB un AD, attiecīgi, pie tam H atrodas trijstūra SCT iekšienē un

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Pierādīt, ka taisne BD pieskaras trijstūra TSH apvilktajai riņķa līnijai.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus

Trešdiena, 2014. gada 9. jūlijs

4. uzdevums. Šaurleņķa trijstūra ABC malai BC pieder tādi punkti P un Q, ka $\angle PAB = \angle BCA$ un $\angle CAQ = \angle ABC$. Punkti M un N pieder taisnēm AP un AQ, attiecīgi, pie tam P ir AM viduspunkts, un Q ir AN viduspunkts. Pierādīt, ka taišņu BM un CN krustošanās punkts pieder trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai.

5. uzdevums. Keiptaunas Banka izgatavo monētas ar nominālu $\frac{1}{n}$, katram pozitīvam veselam skaitlim n. Dots galīgs šādu monētu skaits (ar ne obligāti dažādiem nomināliem), kuru kopējā vērtība nepārsniedz $99 + \frac{1}{2}$. Pierādīt, ka ir iespējams sadalīt šīs monētas 100 vai mazāk grupās tā, lai katras grupas kopējā vērtība nepārsniegtu 1.

6. uzdevums. Teiksim, ka plaknes taišņu kopa atrodas *vispārīgā stāvoklī*, ja starp tām nav divu paralēlu un nav trīs tādu, kas krustojas vienā punktā. Plaknes taišņu kopa vispārīgā stāvoklī sagriež plakni daļās, dažām no kurām ir galīgs laukums; šādas daļas sauksim par tās *galīgām daļām*. Pierādīt, ka visiem pietiekoši lieliem n, jebkurā n taišņu kopā vispārīgā stāvoklī ir iespējams nokrāsot vismaz $\sqrt{n}$ taisnes zilas tādā veidā, lai nevienas tās galīgas daļas robeža nebūtu nokrāsota pilnīgi zila.

Piezīme: Rezultātiem, kur $\sqrt{n}$ ir aizvietots ar $c\sqrt{n}$, tiks piešķirti punkti, atkarībā no konstantes c vērtības.

Laiks: 4 stundas un 30 minūtes
Par katru uzdevumu var nopelnīt 7 punktus