Uzdevumi

2012. gada 10. novembris, Tartu, Igaunija

–Latvian version–

Darba laiks: 4 stundas un 30 minūtes.
Jautājumus drīkst uzdot pirmo 30 minūšu laikā.
Izmantot drīkst tikai rakstīšanai un zīmēšanai paredzētos rīkus.

1. uzdevums. Veselos skaitļus no 1 līdz 360 sadala deviņās pēc kārtas sekojošu skaitļu apakškopās (apakškopas ir netukšas un katrs skaitlis atrodas tieši vienā no apakškopām). Apakškopās esošo skaitļu summas izvieto 3×3 kvadrāta rūtiņās. Vai iespējams, ka šādi izveidojas maģiskais kvadrāts?

Piezīme: Skaitļu kvadrātu sauc par maģisku, ja skaitļu summas pa rindiņām, stabiņiem un abās diagonālēs visas ir vienādas.

2. uzdevums. Doti reāli skaitļi a, b, c. Pierādīt, ka

$$ab + bc + ca + \max\{|a-b|, |b-c|, |c-a|\} \leq 1 + \frac{1}{3}(a+b+c)^2.$$

3. uzdevums. a) Pierādīt, ka vienādojumam

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3$$

katrā intervālā starp pēc kārtas sekojošiem veseliem pozitīviem skaitļiem ir tieši viens reāls atrisinājums. $\lfloor x \rfloor$ apzīmē lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x.

b) Pierādīt, ka neviens no reālajiem pozitīvajiem šī vienādojuma atrisinājumiem nav racionāls skaitlis.

4. uzdevums. Pierādīt, ka bezgalīgi daudziem veselu skaitļu pāriem (a, b) starp vienādojuma

$$x^{2012} = ax + b$$

atrisinājumiem ir divi dažādi reāli skaitļi, kuru reizinājums ir 1.

5. uzdevums. Atrast visas tādas funkcijas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kurām vienādība

$$f(x+y) = f(x-y) + f(f(1-xy))$$

izpildās visiem reāliem skaitļiem x un y.

6. uzdevums. Uz galda stāv 2012 lampas. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli. Katrā gājienā spēlētājs pārslēdz vienas lampas slēdzi, taču nedrīkst izveidoties tāds ieslēgto lampu izvietojums, kāds jau kopš spēles sākuma uz galda ir bijis. Spēlētājs, kurš nevar izdarīt gājienu, zaudē. Kuram spēlētājam ir uzvaroša stratēģija?

7. uzdevums. 2012×2012 rūtiņu kvadrātā uz diagonāles, kas labo augšējo stūri savieno ar kreiso apakšējo stūri, ir iekrāsotas dažas rūtiņas. Neviena stūra rūtiņa nav iekrāsota. Katrā kvadrāta rūtiņā tiek ierakstīts vesels skaitlis šādā veidā. Visās augšējās rindas un kreisās kolonnas rūtiņās ierakstīts 1. Visās iekrāsotajās rūtiņās ierakstīta 0. Katrā no pārējām rūtiņām ierakstīts skaitlis, kas vienāds ar to divu skaitļu summu, kas ierakstīti rūtiņās virs un pa kreisi no tās. Pierādīt, ka labajā apakšējā stūrī ierakstītais skaitlis nedalās ar 2011.

Uzdevumi

2012. gada 10. novembris, Tartu, Igaunija

–Latvian version–

8. uzdevums. Orientēts grafs nesatur orientētus ciklus. Katra orientētā ceļa šķautņu skaits nepārsniedz 99. Pierādīt, ka ir iespējams šī grafa šķautnes izkrāsot divās krāsās tā, ka šķautņu skaits katrā vienkrāsainā orientētā ceļā nepārsniedz 9.

9. uzdevums. Katrā kvadrāta 5×5 rūtiņā ir ierakstīta 0. Drīkst patvaļīgā rūtiņā un tās kaimiņu rūtiņās ierakstītos skaitļus palielināt par 1. Vai šādu darbību rezultātā ir iespējams panākt, ka visās kvadrāta rūtiņās vienlaicīgi atrodas skaitļi 2012?

Piezīme: par kaimiņu rūtiņām sauc rūtiņas, kam ir kopīga mala.

10. uzdevums. Spēlētāji A un B spēlē šādu spēli. Pirms spēles A izvēlas 1000 nepāra pirmskaitļus (ne obligāti dažādus), tad B izvēlas pusi no tiem un uzraksta tos uz tāfeles. Katrā spēles gājienā kaut kādam veselam pozitīvam skaitlim n spēlētājs izvēlas kaut kādus uz tāfeles esošus pirmskaitļus p_1, p_2, $\ldots$, p_n, nodzēš tos un vietā uzraksta skaitļa $p_1p_2\ldots p_n - 2$ pirmreizinātājus (ja skaitļa $p_1p_2\ldots p_n - 2$ sadalījumā pirmreizinātājos kāds pirmskaitlis ir sastopams k reizes, tad to šajā gājienā uzraksta k reizes). Pirmo gājienu izdara A. Spēlētājs, pēc kura gājiena tāfele paliek tukša, zaudē. Pierādīt, ka vienam no spēlētājiem ir uzvaroša stratēģija, kā arī noteikt, kuram tā ir.

Piezīme: Tā kā skaitlim 1 nav pirmreizinātāju, tad viena skaitļa 3 nodzēšana ir atļauts gājiens.

11. uzdevums. Trijstūrī ABC: $\angle A = 60°$. Trijstūra iekšpusē izvēlēts tāds punkts T, ka $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120°$. Punkts M ir BC viduspunkts. Pierādīt, ka $TA + TB + TC = 2AM$.

12. uzdevums. Uz riņķa līnijas dotā secībā izvietoti punkti P_0, P_1, $\ldots$, $P_8 = P_0$. Punkts Q atrodas daudzstūra $P_0P_1\ldots P_7$ iekšpusē, pie tam $\angle P_{i-1}QP_i = 45°$, kur $i = 1, \ldots, 8$. Pierādīt, ka summas

$$\sum_{i=1}^{8} P_{i-1}P_i{}^2$$

vērtība ir minimāla tad un tikai tad, ja Q ir riņķa līnijas centrs.

13. uzdevums. ABC ir šaurleņķu trijstūris, H ir tā augstumu krustpunts. Ar H_A, H_B un H_C apzīmēsim attiecīgi no virsotnēm A, B un C vilkto augstumu otru krustpunktu ar trijstūrim ABC apvilkto riņķa līniju. Pierādīt, ka $\triangle H_AH_BH_C$ laukums nepārsniedz $\triangle ABC$ laukumu.

14. uzdevums. Dots trijstūris ABC, tajā ievilktā riņķa līnija pieskaras malām BC, CA, AB attiecīgi punktos D, E, F. Punkts G ir nogriežņa DE viduspunkts. Pierādīt, ka $\angle EFC = \angle GFD$.

15. uzdevums. Četrstūrim $ABCD$ apvilktās riņķa līnijas centrs O atrodas četrstūra iekšpusē, bet ne uz diagonāles AC. Četrstūra diagonāles krustojas punktā I. Trijstūrim AOI apvilktajai riņķa līnijai ar malu AD ir kopīgs punkts P, bet ar malu AB — kopīgs punkts Q; trijstūrim COI apvilktajai riņķa līnijai ar malu CB ir kopīgs punkts R, bet ar malu CD — kopīgs punkts S. Pierādīt, ka $PQRS$ ir paralelograms.

16. uzdevums. Pozitīvi veseli skaitļi n, m un k apmierina vienādību $(n-1)n(n+1) = m^k$. Pierādīt, ka $k = 1$.

Uzdevumi

2012. gada 10. novembris, Tartu, Igaunija

–Latvian version–

17. uzdevums. Ar $d(n)$ apzīmēsim skaitļa n pozitīvo dalītāju skaitu. Atrast visus skaitļu trijniekus (n, k, p), kur n un k ir veseli pozitīvi skaitļi un p ir pirmskaitlis, kam izpildās

$$n^{d(n)} - 1 = p^k.$$

18. uzdevums. Atrast visus tādus veselu skaitļu trijniekus (a, b, c), kas apmierina vienādību $a^2 + b^2 + c^2 = 20122012$.

19. uzdevums. Pierādīt, ka $n^n + (n+1)^{n+1}$ ir salikts skaitlis bezgalīgi daudzām veselām pozitīvām skaitļa n vērtībām.

20. uzdevums. Atrast visus vienādojuma $2x^6 + y^7 = 11$ atrisinājumus veselos skaitļos.