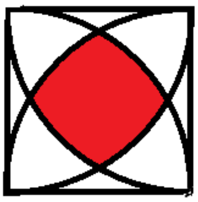
MĀJAS DARBA ATRISINĀJUMI

1. uzdevums

Aprēķināt sarkanās daļas laukumu, ja to ierobežo četru vienības riņķa līniju (to centri atrodas vienības kvadrāta virsotnēs) loki, sk. 1. zīm. (Šo uzdevumu var risināt gan ar integrāļu palīdzību (skat. prezentācijas 29. slaidu), gan arī neizmantojot integrāļus.)

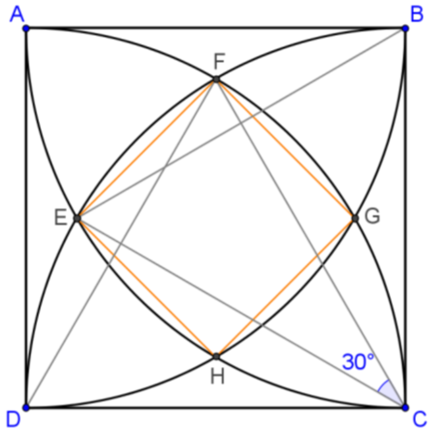


1. zīm.

Atrisinājums

Viens no vienkāršākajiem ir šāds risinājums. Iekrāsotās daļas laukumu S iegūst kā

$$S = S_{EFGH} + 4S_{segm}$$



2. zīm.

Tā kā $\angle DCF = 60°$ (ΔDFC - regulārs, jo visas tā malas ir vienības riņķa līniju rādiusi) un $\angle ECB = 60°$ (ΔEBC - regulārs, jo visas tā malas ir vienības riņķa līniju rādiusi), tad $\angle ECF = 30°$.

Segmenta laukumu S_{segm} iegūst no sektora laukuma $S_{sekt} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360°} = \frac{\pi \cdot 30°}{360°} = \frac{\pi}{12}$ atņemot ΔECF laukumu $S_{ECF} = \frac{1}{2} ab \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$:

$$S_{segm} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} - 1\right).$$

Apzīmēsim ar d kvadrāta $EFGH$ diagonāles garumu, bet ar a attālumu no šīs diagonāles galapunkta līdz dotā vienības kvadrāta malai. Tad $d + 2a = 1$. Tā kā $d + a$ ir vienādmalu trijstūra (ar malas garumu 1) augstums, tad

$$d + a = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2d + 2a = \sqrt{3}.$$

Atņemot no šīs vienādības iepriekšējo vienādību $d + 2a = 1$, secinām, ka $d = \sqrt{3} - 1$. Tātad

$$S_{EFGH} = \frac{d^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} \text{ un } S = S_{EFGH} + 4S_{segm} = 2 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - 1 = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}.$$

Piezīme. *Līdzīgi 1. uzdevumu bija risinājusi Rīgas 84. vidusskolas skolniece Natālija Volodina, kura, izmantojot kosinusa teorēmu, vieglāk aprēķināja ΔECF malas EF garumu:*
$EF^2 = EC^2 + FC^2 - 2EC \cdot FC \cdot \cos 30° = 1 + 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$
Par pamatu 2. un 3. uzdevuma risinājumiem tika ņemti Jelgavas Spīdolas ģimnāzijas skolnieces Alinas Sivickas iesūtītie risinājumi.

2. uzdevums

Aprēķināt $\lim_{n\to\infty} a_n$, ja $a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + ... + \frac{n}{3^n}$.

Aprēķināt pirmos četrus locekļus: a_1, a_2, a_3, a_4.

Norādījums. Izmantot bezgalīgi dilstošas ģeometriskās progresijas summas formulu:
$1 + x + x^2 + ... = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. (Skat. prezentācijas 21. slaidu.)

Atrisinājums

$a_1 = \frac{1}{3}$

$a_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

$a_3 = a_2 + \frac{3}{27} = \frac{5}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

$a_4 = a_3 + \frac{4}{81} = \frac{2}{3} + \frac{4}{81} = \frac{54}{81} + \frac{4}{81} = \frac{58}{81}$

$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$, tātad $1' + x' + \left(x^2\right)' + \ldots + \left(x^n\right)' + \ldots = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$.

Atvasinot iegūst $0 + 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + n \cdot x^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$

Pareizinot abas puses ar *x*, iegūst

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + n \cdot x^n + \ldots = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

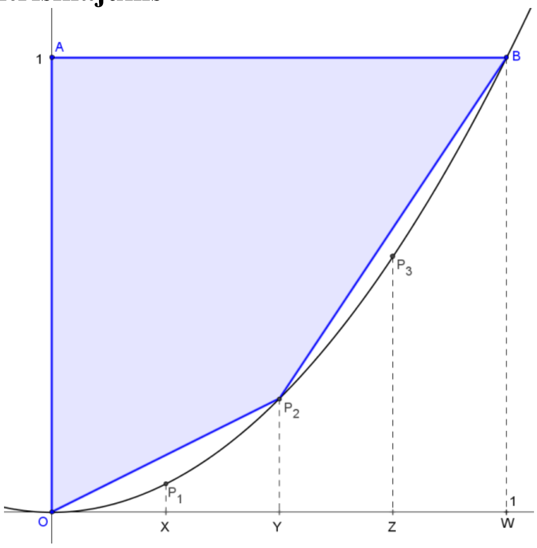
Ievietojot $x = \frac{1}{3}$, iegūst $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \ldots = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3}{4}$.

Tātad $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$.

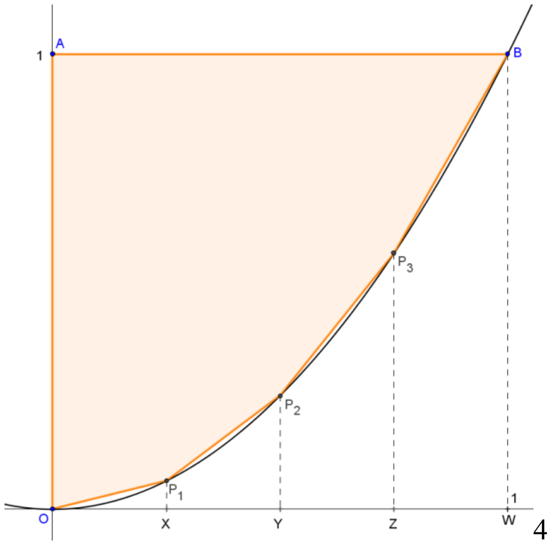
3. uzdevums

Uz parabolas $y = x^2$ izvēlēti trīs punkti P_1, P_2, P_3, kuru abscisas attiecīgi ir: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. Doti arī punkti *A* (0; 1), *B* (1; 1), *O* (0; 0). Aprēķināt četrstūra $OABP_2$ un sešstūra $OABP_3P_2P_1$ laukumu.

Atrisinājums



3. zīm.



4. zīm.

Pieņemsim, ka divi punkti $M(x_M; y_M)$ un $N(x_N; y_N)$ atrodas virs *Ox* ass un punkts *N* ir vairāk pa labi. Ja aplūko arī punktus zem tiem - $(x_M;0)$ un $(x_N;0)$, tad tie veido trapeci. Šīs trapeces pamatu garumi ir y_M un y_N, bet augstums ir $x_N - x_M$. Tad tās laukums ir

$$S = (x_N - x_M)\frac{y_M + y_N}{2}$$

Doto punktu koordinātas: $O(0;0)$, $P_1\left(\frac{1}{4};\frac{1}{16}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $P_3\left(\frac{3}{4};\frac{9}{16}\right)$, $B(1;1)$, $A(0;1)$.

Tad četrstūra laukums ir:

$$S_{OABP_2} = S_{OABW} - S_{OP_2Y} - S_{YP_2BW} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\frac{1}{4}+1}{2} = 1 - \frac{1}{16} - \frac{5}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}.$$

Sešstūra laukums ir:

$$S_{OABP_3P_2P_1} = S_{OABW} - S_{OP_1X} - S_{XP_1P_2Y} - S_{YP_2P_3Z} - S_{ZP_3P_4W} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} - \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}}{2} - \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\frac{1}{4}+\frac{9}{16}}{2} - \left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{\frac{9}{16}+1}{2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{128} - \frac{5}{128} - \frac{13}{128} - \frac{25}{128} = 1 - \frac{44}{128} = 1 - \frac{11}{32} = \frac{21}{32}.$$

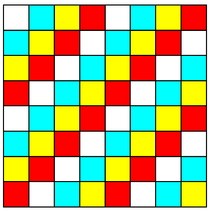
4. uzdevums

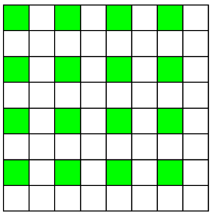
Uzrakstiet lekcijā aplūkotā uzdevuma pilnu atrisinājumu, izmantojot abus lekcijā dotos krāsojumu invariantus. Vai varat atrast vēl kādu citu noderīgu krāsojumu?

<u>Lekcijā dotais uzdevums:</u>

Kvadrāts ar izmēriem 100×100 rūtiņas ir pilnībā noklāts ar divu veidu rūtiņu figūrām, kuru izmēri ir 2×2 rūtiņas un 1×4 rūtiņas, tā, ka figūras savstarpēji nepārklājas. Vai ir iespējams noņemt vienu kvadrātisko figūru un aizvietot to ar taisnstūra figūru, lai atkal var izveidot lielā kvadrāta visu rūtiņu pārklājumu?

<u>Krāsojumi:</u>


5. zīm.


6. zīm.

Atrisinājums

1) Noņemsim visas dotās figūriņas no kvadrāta un izkrāsosim visas kvadrāta rūtiņas 4 krāsās tā, kā parādīts 5. zīm.

Tad jebkurš 2×2 rūtiņas liels kvadrātiņš satur tieši 3 dažādu krāsu rūtiņas. Viens taisnstūris 4×1 pārklāj tieši četru dažādu krāsu rūtiņas, lai arī kur to kvadrāta pārklājumā nenovietotu. Tāpēc jebkurš laukumiņš ar izmēriem 2×2 ir jāpārklāj vai nu ar vismaz diviem taisnstūriem, vai vienu kvadrātiņu, lai visas tā rūtiņas būtu pārklātas.

Ja no dotā figūriņu komplekta izņem vienu kvadrātisko figūru un atlikušās figūras patvaļīgi izvieto dotajā kvadrāta atbilstoši uzdevuma prasībām, tad atradīsies divas kaut kādas nepārklātas vienādi krāsotas rūtiņas, ko nav iespējams pārklāt ar vienu taisnstūra figūru.

<u>*Secinājums:*</u>

Izpētīsim dotā krāsojuma īpašības.

Vispārīgi – krāsojot 10 rūtiņu rindas katru rūtiņu vienā no 4 krāsām, būs vismaz trīs rūtiņas, kuras nokrāsotas vienā krāsā (saskaņā ar Dirihlē principu). Tad nokrāsoto rūtiņu skaiti visā kvadrātā var atšķirties. Dotajam krāsojuma veidam aprēķināsim konkrēti:

Vienā krāsā būs nokrāsotas 25 rūtiņas, pieņemsim, baltā;

Otrā krāsā būs nokrāsotas 26 rūtiņas, pieņemsim, zilā;

Trešā krāsā būs nokrāsotas 25 rūtiņas, pieņemsim, dzeltenā;

Ceturtā krāsā – sarkanā – 24 rūtiņas.

Ievērojot, ka katrs taisnstūris pārklāj tieši četru dažādu krāsu rūtiņas, secinām, ka kvadrātu 10x10 rūtiņas nevar pārklāt tikai ar šādiem taisnstūriem.

2) Noņemsim visas dotās figūriņas no kvadrāta un izkrāsosim visas kvadrāta rūtiņas 2 krāsās tā, kā parādīts 6. zīm.

Pieņemsim, ka pārklājumā izmantoto kvadrātiņu skaits ir *n*, bet taisnstūru skaits ir *m*. Tad visi kvadrātiņi kopā pārklāj *n* zaļās rūtiņas, bet visu taisnstūru kopā pārklātais zaļo rūtiņu skaits ir pāra skaitlis 2*k*, jo viens taisnstūris pārklāj vai nu 0, vai 2 zaļās rūtiņas. Ievērojot krāsojumu, var aprēķināt, ka kopējais zaļo rūtiņu skaits ir $n+2k=25$. Ja pieņemsim, ka pārklājumā aizvietosim vienu kvadrātiņu ar taisnstūri, tad kopējais pārklāto zaļo rūtiņu skaits būs: $n-1+2k+2=n+2k+1=25+1>25$ vai $n-1+2k+0=n+2k-1=25-1<25$.

No tā var secināt, ka būs vai nu vismaz viena tāda zaļā rūtiņa, kura pārklāta ar divām figūriņām, vai arī tāda zaļa rūtiņa, kura nav pārklāta.

Abi dotie krāsojumi parāda, ka nav iespējams izklājumā aizvietot kvadrātiņu ar taisnstūri.

5. uzdevums

Pierādiet, ka jebkuram veselam pozitīvam skaitlim N var atrast tādu skaitli, kurš dalās ar N un kura pieraksts sastāv tikai no cipariem 0 un 1! Gadījumā, ja N un skaitlis 10 ir savstarpēji pirmskaitļi, pierādiet, ka var atrast tādu skaitli, kura pieraksts sastāv tikai no cipariem 1 un kurš dalās ar N.

Atrisinājums

Aplūkosim sekojošos skaitļus:

$$1, 11, 111, ... , 111..1,$$

kur pēdējais skaitlis sastāv no N+1 vieninieka. Šie skaitļi, dalot tos ar N, dos N atlikumus. Ja kāds no tiem dalās ar N, tad prasītais skaitlis ir atrasts. Ievērojot, ka iespējami N dažādi atlikumi, ieskaitot 0, bet skaitļu ir N+1, tad vismaz diviem skaitļiem atlikumi sakritīs. Šo skaitļu starpība dalās ar N. Šī starpība ir formā 111..1100...0.

Ja N un skaitlis 10 ir savstarpēji pirmskaitļi, tad minēto starpību var saīsināt ar skaitļa 10 pakāpēm. Dalījums būs skaitlis, kurš sastāvēs tikai no cipariem 1 un dalīsies ar N.

No tā var secināt – ja aplūko visas skaitļa 10 pakāpes un to moduļus pēc skaitļa N (N un 10 ir savstarpēji pirmskaitļi), tad iegūtie atlikumi cikliski atkārtosies. Ievērojot, ka N dala kādu skaitli 111...11, kurš sastāv tikai no cipariem 1, var secināt, ka N dala arī viena šāda atlikumu cikla summu.

Piemēram, ja N=13, tad atlikumi ir

$$10^0 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$10^1 \equiv 10 \pmod{13}$$
$$10^2 \equiv 9 \pmod{13}$$
$$10^3 \equiv 12 \pmod{13}$$
$$10^4 \equiv 3 \pmod{13}$$
$$10^5 \equiv 4 \pmod{13}$$
$$10^6 \equiv 1 \pmod{13}$$

Šo atlikumu cikla summa ir

$$1+10+9+12+3+4=39=3\cdot 13$$

Skaitlis, kurš dalās ar 13, ir to desmitnieku pakāpju summa, kuras veido pilnu atlikumu ciklu:

$$\sum_{n=0}^{5} 10^n = 111111 = 8547 \cdot 3$$

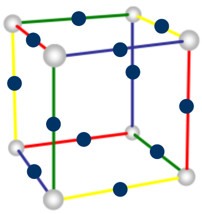
<u>*Piezīme.*</u> Šajā uzdevumā izvēlamies „būrus" – skaitļu ekvivalences klases pēc moduļa N. „Zaķi" ir dažādie skaitļi, kuru pieraksts sastāv tikai no cipariem 1.

6. uzdevums
Kubs salikts no 27 vienības kubiņiem. Šaha zirdziņš var lekt no viena kubiņa centra uz cita kubiņa centru, pārvietojoties 2 kubiņus taisni, tad vienu, pagriežoties par 90°, vai 1 taisni, tad 2, pagriežoties par 90°. (Viena lēciena laikā zirdziņš apmeklē tikai kubiņu, no kur sāk, un kubiņu, kurā piezemējas.)
a) Vai zirdziņš var veikt tādu ceļu, ka viņš ielec katrā kuba stūrī un katrā vienības kubā, kuri ir šajā ceļā, viņš ielec ne vairāk kā vienu reizi?
b) Vai iespējams izpildīt a) punktā minēto ceļu, ja zirdziņš šķērso katru kuba skaldni ne vairāk kā 2 reizes? (Zirdziņš šķērso kuba skaldni, ja viņš veic lēcienu no viena skaldnes kubiņa uz citu šīs skaldnes kubiņu.)

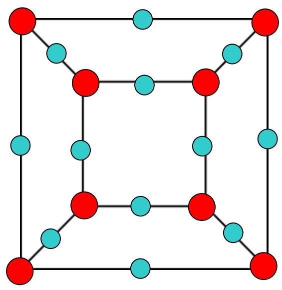
Atrisinājums

a) Tas ir iespējams. Vispirms ievērosim, ka uzdevumā nav prasīts, lai zirdziņa maršruts sastāv no visiem vienības kubiem. Kā arī ievērosim, ka zirdziņš nevar no stūra ielekt skaldnes centrālajā vienības kubā, bet pašā centrālajā – neredzamajā vienības kubā zirdziņš vispār nevar ielekt, jo viņa lēciens ir „par garu”.

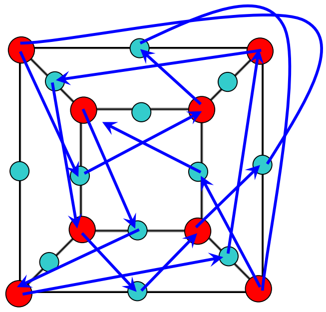
Tāpēc uzmanību vispirms pievērsīsim stūriem un šķautnēm, ko shematiski varam apzīmēt šādi:



Apskatīsim šo struktūru no augšas:



Tad zirdziņa maršruts varētu būt sekojošais – šeit viņš var veikt veselu ciklu:



b) Aplūkojot iepriekšējo attēlu redzam, kreiso skaldni zirdziņš ir šķērsojis divas reizes, bet apakšējo – 4 reizes. Jautājums ir – vai iespējams katru skaldni šķērsot ne vairāk kā 2 reizes?

Zirdziņa maršrutā ir 8 stūra virsotnes jeb kubiņi (shēmā sarkanā krāsā), bet stūros var ielekt tikai no šķautņu centrālajiem kubiņiem (shēmā gaiši zilā krāsā). Lai zirdziņš varētu veikt ceļojumu pa visām kuba virsotnēm, viņam kopumā jānonāk vismaz 15 vienības kubiņos, tas ir, jāizdara vismaz 14 lēcieni. Viens lēciens šķērso kādu skaldni.

Kubam ir 6 skaldnes („būri”), bet lēcieni („zaķi”) ir 14. Tad saskaņā ar Dirihlē principu vismaz vienu skaldni zirdziņš šķērso vismaz 3 reizes (jo $2 \cdot 6 = 12 < 14$).
Iepriekš, punktā a), mēs izslēdzām iespēju, ka zirdziņš ielec skaldnes centrālajā kubiņā. Ja pieļausim šādu iespēju, vai tas varētu uzlabot situāciju? Tādā veidā tiktu pagarināts zirdziņa maršruts. Bet, ja jāielec kādas skaldnes centrālajā kubiņā, tad no tā atkal ir jālec laukā, jo stūrī no centrālā kuba tikt nevar. Tādēļ situāciju šādi uzlabot nevar.