Materiāls ņemts no grāmatas:Andžāns Agnis, Bērziņa Anna, Bērziņš Aivars "Latvijas matemātikas olimpiāžu (25.-51.) 2.kārtas (rajonu) uzdevumi un atrisinājumi"

LATVIJAS RAJONU 40. OLIMPIĀDE

ATRISINĀJUMI

40.1. Ir jāaprēķina 100-ais loceklis aritmētiskā progresijā, kuras pirmais loceklis ir 15 un otrais 40. Tātad diference ir 25. Tas nozīmē, ka 100-ais loceklis būs vienāds ar $15+(100-1)\cdot 25=2490$.

40.2. Skaitļus sagrupēsim grupās: no 1 līdz 9, no 10 līdz 19, no 20 līdz 29, …, no 90 līdz 99 un skaitlis 100.

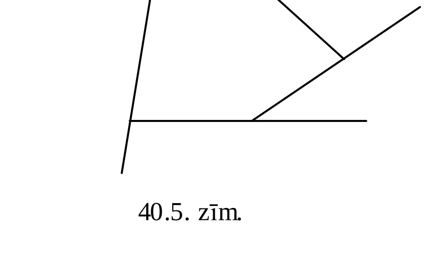
Visās grupās, izņemot pirmo un pēdējo ir vienāds skaits skaitļu, kuriem ciparu summa ir pāra vai nepāra; bet pirmajā un pēdējā grupās skaitļu, kuriem ciparu summa ir nepāra skaitlis ir par vienu lielāka, nekā skaitļu, kuriem ciparu summa ir pāra. Tātad kopīgais skaits skaitļu, kam ciparu summa ir nepāra skaitlis ir par 2 lielāka, nekā skaitļu, kam ciparu summa ir pāra skaitlis.

40.3. To var izdarīt, piemēram, tā ka parādīts 40.4. zīmējumā.

$$
\begin{array}{ccccccc}
[6] & - & 1 & + & [3] & = 8 \\
+ & & \times & & : & \\
[2] & \times & [2] & + & [3] & = 7 \\
\times & & + & & + & \\
[1] & \times & [5] & - & [1] & = 4 \\
= 8 & & = 7 & & = 2 &
\end{array}
$$

40.4. zīm.

40.4. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 40.5. zīmējumā.



40.5. zīm.

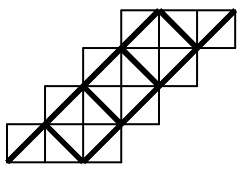
40.5. Kopējā glāzes ietilpība ir 7 karotes. Jānis izdzēra 7 karotes kafijas un $1+2+3=6$ karotes piena; tātad izdzēra vairāk kafiju.

40.6. Ja $a=b=0$, tad tiek atzīmēts 1 punkts.
Ja $a=0, b\neq 0$ vai $b=0, a\neq 0$, tad tiek atzīmēti 4 punkti.
Ja $a=\pm b$, tad tiek atzīmēti 4 punkti.
Pārējos gadījumos tiek atzīmēti 8 punkti.

40.7. Ja kaut vienā no vienādībām (piemēram $|x|=|y+z|$) skaitļu zīmes ir pretējas, tad uzreiz iegūstam prasīto vienādību: $-x=y+z \Rightarrow x+y+z=0$.
Ja visās vienādībās skaitļu zīmes ir vienādas, tad $x=y+z,\ y=x+z,\ z=x+y$; saskaitot šīs vienādības, iegūstam prasīto.

40.8. Pieņemsim, ka ģimeņu skaits ir *n*. Katrā ģimenē ir vismaz viens dēls. Tātad zēnu skaits ir vismaz *n*. Tā kā meiteņu ir ne mazāk kā zēnu, tad kopā bērnu ir vismaz $2n$, bet vecāku ir tieši $2n$. Tātad pieaugušo mājā nav vairāk par bērniem.

40.9. Locījuma līnijas attēlotas 40.6. zīmējumā.



40.6. zīm.

40.10. Kopējais piecu taišņu krustpunktu skaits ir 10. Katrs krustpunkts tiek ieskaitīts četros apgabalos. Tātad jebkurā gadījumā prasītā summa būs vienāda ar 40.

40.11. Ja $a=0$, tad $b=0$ vai $b=c$; bet tā ir pretruna.
Ja $b=0$, tad $a=0$; un atkal iegūta pretruna.
Tātad $c=0$; tagad no vienādības $a^2=b^3$ seko, ka $b>0$; līdz ar to $a<0$.

40.12. Ja $x\geq y$, tad $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y+x-y)=x=\max(x,y)$.

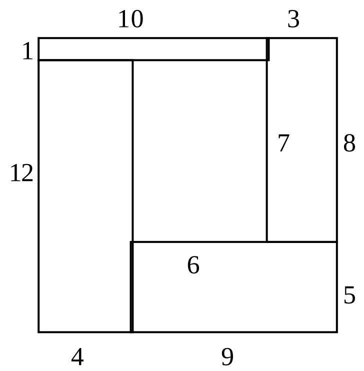
Ja $x<y$, tad $\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)=\frac{1}{2}(x+y-x+y)=y=\max(x,y)$.

Formula, kas izsaka mazāko no skaitļiem ir šāda: $\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$. Pierādījums ir analoģisks iepriekšējam.

40.13. Nē, nevar. Ja šīs diagonāles krustotos vienā punktā, tad tām būtu 12 galapunktu, kas ir daudzstūra virsotnes; bet desmitstūrim ir tikai 10 virsotnes.

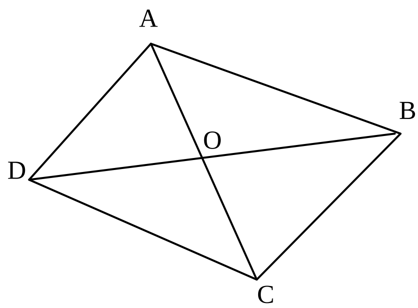
40.14. Apzīmēsim $3A = B$. Tā kā B dalās ar 3, tad arī B ciparu summa $S(B)$ dalās ar 3. Tā kā skaitļu A un B ciparu summas ir vienādas, tad arī skaitļa A ciparu summa dalās ar 3; tātad A dalās ar 3. Tas nozīmē, ka B dalās ar 9; tātad B ciparu summa $S(B)$ dalās ar 9 un arī skaitļa A ciparu summa dalās ar 9. Tātad A dalās ar 9.

40.15. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 40.7. zīmējumā.



40.7. zīm.

40.16. Skat. 40.8. zīmējumu.



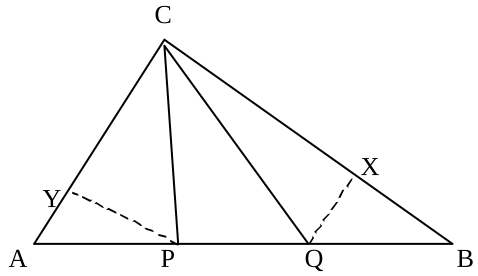
40.8. zīm

No dotā seko, ka $\angle OAB = \angle OCD$; tātad nogriežņi AB un CD ir paralēli. Tāpat pierāda, ka nogriežņi AD un BC ir paralēli. Tātad $ABCD$ ir paralelograms. Tāpēc $BC = AD$, $\angle OAD = \angle OCB$, $\angle ODA = \angle OBC$; no šejienes seko trijstūru BOC un DOA vienādība.

40.17. Jā, var; piemēram, $2^{12} = \left(2^6\right)^2, 3^{14} = \left(3^7\right)^2, 5^{16} = \left(5^8\right)^2$.

Ja trijnieku skaits būtu 13, tad to izdarīt nevar, jo šo skaitļu reizinājumam jābūt kvadrātam, bet $2^{12} \cdot 3^{13} \cdot 5^{16}$ nav kvadrāts, jo pirmskaitlis 3 ieiet šajā skaitlī nepāra pakāpē.

40.18. Aplūkosim 40.9. zīmējumu.



40.9. zīm.

Novilksim perpendikulus PY un QX pret trijstūra katešu malām . Tad no Talesa teorēmas seko, ka $CY = \frac{2}{3} \cdot CA = \frac{2}{3} \cdot b$, $YP = \frac{1}{3} \cdot CB = \frac{1}{3} \cdot a$, $CX = \frac{2}{3} \cdot CB = \frac{2}{3} \cdot a$, $QX = \frac{1}{3} \cdot AC = \frac{1}{3} \cdot b$.

Tālāk, izmantojot Pitagora teorēmu, iegūstam:

$$CP^2 + PQ^2 + CQ^2 = \left(\tfrac{2}{3} \cdot a\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3} \cdot b\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3} \cdot c\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3} \cdot a\right)^2 + \left(\tfrac{2}{3} \cdot b\right)^2 =$$
$$\tfrac{5}{9} \cdot \left(a^2 + b^2\right) + \tfrac{1}{9} \cdot c^2 = \tfrac{2}{3} \cdot c^2.$$

40.19. Var izveidot 6 pirmskaitļus: 2, 3, 5, 41, 67, 89.

Vairāk par 6 pirmskaitļiem izveidot nevar. Ja pirmskaitļu būtu ne mazāk par 7, tad vismaz 6 no tiem būtu nepāra skaitļi (jo ir tikai viens pāra pirmskaitlis 2). Bet mums ir tikai 5 nepāra cipari, ar kuriem būtu jābeidzas nepāra skaitļiem.

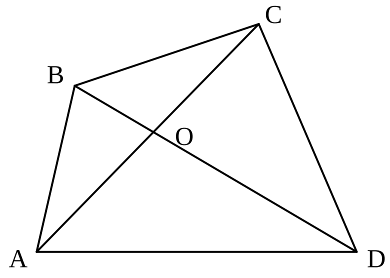
40.20. Aplūkosim visu uzrakstīto skaitļu summu. Ievērosim, ka

$$(2a - b + 1) + (2b - c - 1) + (2c - a + 1) = (a + b + c) + 1.$$

Tāpēc katrā gājienā uzrakstīto skaitļu summa palielinās par 1. Tas nozīmē, ka mēs nekad neiegūsim sākotnējo skaitļu komplektu.

40.21. Atņemot no otrā vienādojuma pirmo, iegūstam $x + 2x = 14$. Ievietojot $x = 14 - 2y$ pirmajā vienādojumā, iegūstam $5y^2 - 57y + 160 = 0$, no kurienes iegūstam atbildes: $x_1 = 4,\ y_1 = 5$ un $x_2 = 1{,}2$, $y_2 = 6{,}4$. Atbildes jāpārbauda.

40.22. Aplūkosim 40.3. zīmējumu.



40.3. zīm.

Pieņemsim, ka $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COD}$. No trijstūru *AOB* un *BOC* vienādības seko, ka $AO = OC$. Trijstūriem *AOB* un *BOC* ir kopīgs augstums un vienādi laukumi; tātad arī vienādi pamati. Līdzīgi pierāda, ka $BO = OD$. Tas nozīmē, ka četrstūra *ABCD* diagonāles krustojoties dalās uz pusēm; tātad tas ir paralelograms.

40.23. Skaitļi 3, 23, 43 apmierina uzdevuma nosacījumus. Pierādīsim, ka citu atrisinājumu nav.

Apzīmēsim dotos skaitļus ar *n*, $n+20$, $n+40$.

a) Ja $n \equiv 0 \pmod 3$, tad *n* var būt pirmskaitlis tikai , ja $n = 3$.

b) Ja $n \equiv 1 \pmod 3$, tad $n+20$ dalās ar 3, un nav pirmskaitlis.

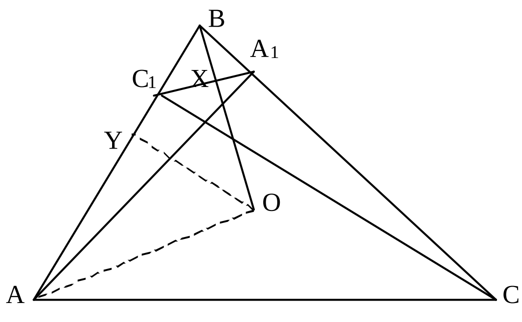
c) Ja $n \equiv 2 \pmod 3$, tad $n+40$ dalās ar 3, un nav pirmskaitlis.

40.24. Apzīmēsim dotos skaitļus ar $x_1 < x_2 < \cdots < x_{69}$. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka $x_1 \le 32$. (Ja $x_1 \ge 33$, tad $x_2 \ge 34, x_3 \ge 35, \ldots, x_{69} \ge 101$; tā ir pretruna).

Apskatīsim 67 savā starpā atšķirīgus skaitļus $x_1 + x_2, x_1 + x_3, \ldots, x_1 + x_{68}$ un 67 savā starpā atšķirīgus skaitļus $x_{69} - x_1, x_{69} - x_2, \ldots, x_{69} - x_{68}$.

Tie visi atrodas intervālā no 1 līdz 132. Tā kā aplūkojamo skaitļu kopskaits ir 134, tad kaut kādi divi no tiem ir vienādi; t.i. $x_1 + x_i = x_{69} - x_j$. No šejienes iegūstam prasīto atrisinājumu $x_1 + x_i + x_j = x_{69}$.

40.25. Skat. zīm. 40.4. zīm.



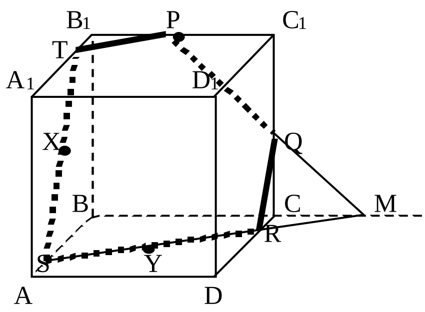
40.4. zīm.

No trijstūru AA_1B un CC_1B līdzības seko, ka $\frac{BC_1}{BA_1} = \frac{BC}{BA}$. No šejienes seko trijstūru BAC un B_1AC_1 līdzība. Tātad $\angle BC_1A_1 = \angle BCA$.

Novilksim perpendikulu OY no punkta O pret taisni AB. Tā kā $\angle BCA$ ir ievilktais leņķis, tad $\angle BOY = \frac{1}{2}\angle BOA = \angle BCA = \angle BC_1X$.

Tā kā leņķis B trijstūriem BYO un BXC_1 ir kopīgs, tad no divu leņķu vienādības seko, ka tie ir līdzīgi. Tātad $90° = \angle BYO = \angle BXC_1$, no kurienes seko prasītais.

40.26. Skat. 40.5. zīm.



40.5. zīm.

Viegli redzēt, ka taisne XY paralēla plaknei BB_1C_1C. Tātad šķēluma līnija PQ Jāvelk paralēli XY (t.i. paralēli CB_1). Apzīmējam $M = PQ \cap BC$. Velkam taisni MY. Tā pieder šķēluma plaknei. Tās krustpunktus ar nogriežņiem AB un CD apzīmējam atbilstoši ar S un R. Velkam taisni SX. Tās krustpunktu ar nogriezni A_1B_1 Apzīmējam ar T.

Prasītais šķēlums ir piecstūris $PQRST$.

40.27. No dotā seko, ka

$$\sin 4x = \sin(17x - 13x) = \sin 17x \cdot \cos 13x - \cos 17x \cdot \sin 13x = 0.$$

Līdzīgi tālāk iegūstam

$$\sin 9x = \sin(13x - 4x) = \sin 13x \cdot \cos 4x - \cos 13x \cdot \sin 4x = 0,$$
$$\sin 5x = \sin(9x - 4x) = 0,$$
$$\sin x = \sin(5x - 4x) = 0.$$

Tālāk ar matemātisko indukciju pierādām, ka visiem naturāliem n $\sin nx = 0$.

Bāze: ja $n = 1$, tad apgalvojums jau pierādīts.

Induktīvā pāreja: pieņemsim, ka $\sin kx = 0$;

Tad $\sin(k+1)x = \sin(kx + x) = \sin kx \cdot \cos x + \cos kx \cdot \sin x = 0$.

Apgalvojums pierādīts.

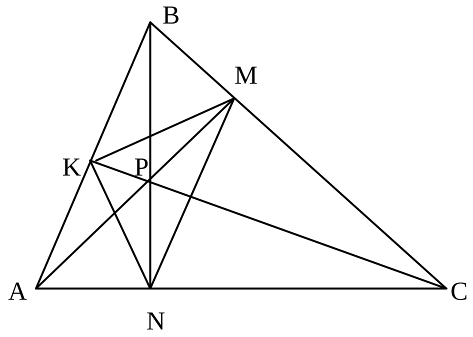
40.28. Atzīmēsim lielākā kopīgā dalītāja pamatīpašību:

$$(a, b) = (a, b + ka),$$

kur k -- patvaļīgs vesels skaitlis. Tātad

$$(a_{1989}, a_{1990}) = (a_{1989}, a_{1990} - a_{1989}) = (a_{1989}, a_{1988}) = (a_{1989} - a_{1988}, a_{1988}) =$$
$$(a_{1987}, a_{1988}) = \cdots = (a_1, a_2) = (19, 90) = 1.$$

40.29. Aplūkosim 40.6. zīmējumu.



40.6. zīm.

Tā kā $AKMC$ -- ievilkts četrstūris, tad $\angle BKM = 180° - \angle AKM = \angle ACM$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle AKN = \angle ACM$. No ievilkto leņķu īpašības seko, ka $\angle NKC = \angle NBC$ un $\angle MKC = \angle MAC$.

No teorēmas par krustojošos hordu nogriežņu reizinājumiem seko vienādības

$$AP \cdot PM = CP \cdot PK \text{ un } CP \cdot PK = BP \cdot PN.$$

Tātad $AP \cdot PM = BP \cdot PN$ un $\dfrac{AP}{PN} = \dfrac{BP}{PM}$; tāpēc trijstūri APN un BPM ir līdzīgi un $\angle PAN = \angle PBM$. No šejienes $\angle AKC = \angle BKC = 90°$ un CK ir augstums.

Tā kā $\angle PAN = \angle PKN$, tad ap četrstūri $AKPN$ var apvilkt riņķa līniju; tāpēc $\angle ANP = 180° - \angle AKP = 90°$ un arī BN ir augstums.

Līdzīgi pierāda, ka AM ir augstums.

40.30. Pēc viena gājiena visu uzrakstīto skaitļu kvadrātu summa palielinās par

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 - a^2 - b^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right),$$

t.i. par nenegatīvu skaitli. Tā kā sākumā neviens skaitlis nav 0, tad pirmajā gājienā šī summa pieaug; tālāk tā nesamazinās. Tātad atgriezties pie izejas pozīcijas nav iespējams.

40.31. Nē neeksistē. Polinoma $F(x)$ pakāpi apzīmēsim $\deg F(x)$. Ja polinoms $F(x)$ nav konstante, tad tā atvasinājuma pakāpe ir par 1 mazāka nekā polinoma $F(x)$ pakāpe. Tad no dotajām vienādībām iegūstam

$$\deg P(x) = \deg Q(x) - 1 = \deg F(x) - 2 = \deg P(x) - 3.$$

Iegūta pretruna.

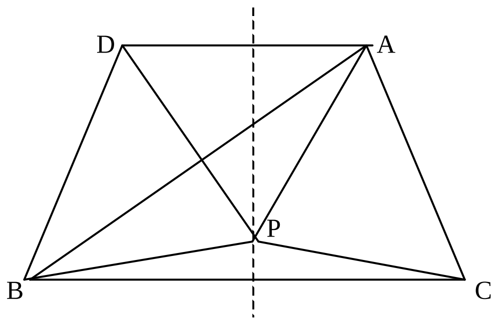
40.32. a) Ja no Q_1 un meklējamā punkta Q_2 attiecīgi plaknēs α un β novilkts perpendikuls pret taisni *t*, tad to pamati atradīsies vienā punktā -- tajā, kur uz taisnes *t* projicēsies punkts *Q*. Tas seko no trīs perpendikulu teorēmas. Tāpēc konstrukcijas gaita ir sekojoša:

1) velkam no Q_1 perpendikulu Q_1Q_0 plaknē α pret taisni *t*,
2) no punkta Q_0 plaknē β velkam perpendikulu pret taisni *t*; tā krustpunkts ar A_2B_2 ir Q_2.

b) Konstrukcijas gaita ir sekojoša.

1) Plaknē α atrodam $M_1 = \mathring{A}_1P_1 \cap C_1B_1$ un $N_1 = C_1P_1 \cap A_1B_1$.
2) No M_1 un N_1 velkam perpendikulus pret taisni *t*.; to pamatus apzīmēsim ar M_0 un N_0 .
3) Plaknē β no M_0 un N_0 velkam perpendikulus pret taisni līdz to krustpunktiem M_2 un N_2 attiecīgi ar B_2C_2 un A_2B_2.
4) Tad $P_2 = A_2M_2 \cap C_2N_2$.

40.33. Papildinām trijstūri *ABC* līdz vienādsānu trapecei *ABCD*; tad *P* atrodas uz tās simetrijas ass (skat. 40.7. zīm.).



40.7. zīm.

Apzīmējam $\angle ABC = \alpha$; tad $\angle BCA = 2\alpha$, $\angle DAC = 180° - 2\alpha$. Tā kā $\angle DAB = \angle ABC = \alpha$, tad $\angle BAC = 180° - 3\alpha$.

No vienādības $\angle DBA = \angle DBC - \angle ABC = \angle ACB - \angle ABC = 2\alpha - \alpha = \alpha = \angle DAB$ seko, ka trijstūris *BDA* ir vienādsānu; tātad $BD = DA$. No šejienes seko, ka trijstūris *PDA* ir regulārs ($PA = PD$ no simetrijas; $PA = AC = BD = DA$); tātad $\angle BAP = 60° - \alpha = \frac{1}{3}\angle BAC$, ko arī vajadzēja pierādīt.

40.34. Vienādojumu sistēmu pārveidojam formā

$$\begin{cases} y = x^{\frac{x+y}{3}} \\ y = x^{\frac{6}{x+y-3}}. \end{cases}$$

Tātad $x^{\frac{x+y}{3}} = x^{\frac{6}{x+y-3}}$.

Ja $x = 1$, tad no dotās sistēmas seko, ka arī $y = 1$.

Ja $x \neq 1$, tad $\frac{x+y}{3} = \frac{6}{x+y-3}$; apzīmējot $x + y = t$ un atrisinot vienādojumu $\frac{t}{3} = \frac{6}{t-3}$, iegūstam $x + y = -3$ vai $x + y = 6$.

1) Ja $x + y = -3$, tad atrisinājumu pozitīvos skaitļos nav.

2) Ja $x + y = 6$, tad iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x^6 = y^3 \\ y^6 = x^6 \cdot y^3 \\ x + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ x + y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + x - 6 = 0. \end{cases}$$

Tās atrisinājumi ir $x = 2;\ y = 4$ un $x = -3;\ y = 9$ (neder, jo $x < 0$).

Atrisinājumi ir jāpārbauda.

Atbilde: $\{(1, 1), (2, 4)\}$.

40.35. No četriem pēc kārtas ņemtiem skaitļiem viens, dalot ar 4, dod atlikumu 2. Tātad tas dalās ar 2, bet nedalās ar 4; tātad nav naturāla skaitļa pakāpe, jo naturāla skaitļa *k*-tā pakāpe satur katru pirmreizinātāju vismaz *k* reizes.

40.36. Apzīmēsim $\sin x = a$ un $\cos x = b$. Dots, ka $a + b < 0$; jāpierāda, ka $a^3 + b^3 < 0$. Tiešām

$$a + b < 0 \quad \Rightarrow \quad a < -b \quad \Rightarrow a^3 < (-b)^3 \quad \Rightarrow a^3 + b^3 < 0.$$

40.37. Atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \end{cases}$$

(uzskatām *a* un *b* par mainīgajiem), iegūstam, ka $a = c$, $b = d$ vai $a = d$, $b = c$. Abos gadījumos prasītā vienādība izpildās.

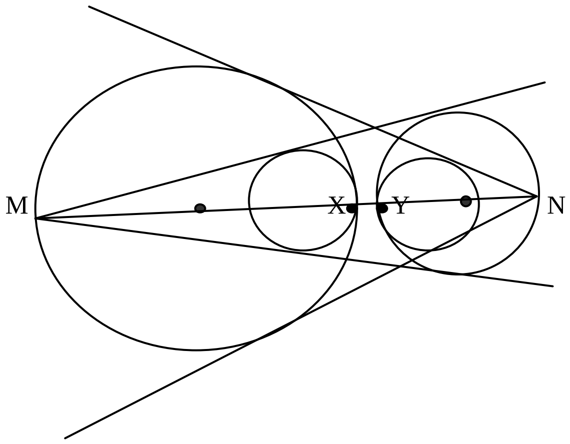
40.38. Riņķa līnijas ω_3 un ω_2 ir homotētiskas ar homotētijas centru punktā *M*. No šejienes seko vienādība $\frac{r_3}{r_2} = \frac{MX}{MN}$. Līdzīgi seko vienādība $\frac{r_1}{r_4} = \frac{MN}{YN}$.

Tā kā $YN = 2r_4$ un $MX = 2r_3$, tad $\frac{r_4}{r_3} = \frac{YN}{MX}$

Sareizinot iegūtās vienādības, iegūstam

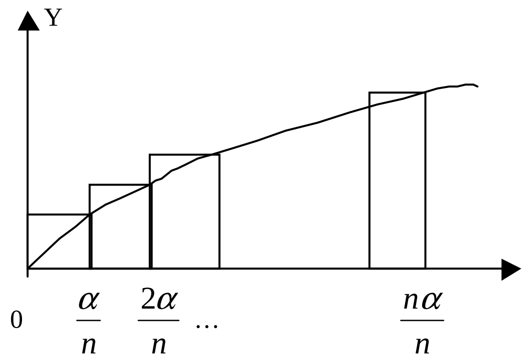
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_2} \cdot \frac{r_4}{r_3} \cdot \frac{r_1}{r_4} = \frac{MX}{MN} \cdot \frac{MN}{YN} \cdot \frac{YN}{MX} = 1 .$$

Tātad $r_1 = r_2$.



40.8. zīm.

40.39. Apskatām funkcijas $y = \sin t$ grafiku intervālā $t \in [0, \alpha]$.



40.8. zīm.

Pierādāmā nevienādība izsaka faktu, ka pakāpienveida figūras laukums lielāks par laukumu zem funkcijas grafika, kas ir vienāds ar $\int_0^{\alpha} \sin t \cdot dt = 1 - \cos\alpha$. Protams šeit tiek izmantots fakts, ka funkcija $y = \sin t$ dotajā intervālā ir augoša.

40.40. Rodas 11 regulāras trijstūra piramīdas un 4 regulāri oktaedri. Visām daļām šķautņu garumi ir trešdaļa no dotās piramīdas šķautnes garuma.