MĀJAS DARBA ATRISINĀJUMI

1. uzdevums

Dotas n riņķa līnijas, kur katras divas riņķa līnijas krustojas divos punktos, bet katras trīs riņķa līnijas nekrustojas vienā punktā. Ar matemātiskās indukcijas metodi pierādīt, ka riņķa līnijas dala plakni $n^2 - n + 2$ daļās.

Atrisinājums

1) Pārbaudīsim indukcijas bāzi, ja $n = 1$. Tā izpildās, jo viena riņķa līnija dala plakni $1^2 - 1 + 2 = 2$ daļās.

2) Pieņemsim, ka apgalvojums ir spēkā pie $n = k$, un k riņķa līnijas dala plakni $k^2 - k + 2$ daļās.

3) Pierādīsim, ka pie $n = k + 1$, $k + 1$ riņķa līnija dala plakni $(k+1)^2 - (k+1) + 2 = k^2 + 2k + k - k - k + 2 = k^2 + k + 2$ daļās. Tātad, ja iepriekš mēs apskatījām k riņķa līnijas, tad tagad tām jāpievieno vēl viena riņķa līnija. Tā visas k riņķa līnijas krusto $2k$ punktos, veidojot $2k$ jaunus lokus, kur katrs loks katru apgabalu sadala divās daļās. Tādejādi apgabalu skaits $k^2 - k + 2$ palielinās par $2k$ un $k^2 - k + 2 + 2k = k^2 + k + 2$ (kas arī bija jāpierāda).

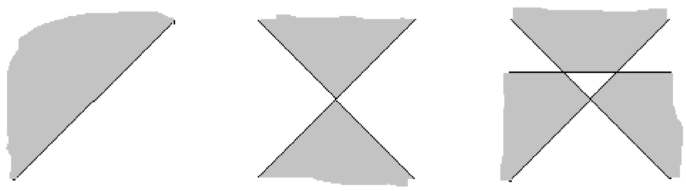
4) Secinājums: n riņķa līnijas atbilstoši uzdevuma nosacījumiem dala plakni $n^2 - n + 2$ daļās.

2. uzdevums

Plaknē novilktas n dažādas taisnes, kuras sadala plakni apgabalos. Pierādīt, ka apgabalus var izkrāsot divās krāsās tā, ka nekādi divi apgabali ar kopīgu malu nav izkrāsoti vienā un tajā pašā krāsā.

Atrisinājums

1) Pārbaudīsim indukcijas bāzi, ja $n = 1$, ja $n = 2$ un, ja $n = 3$ (skat. 1. attēlu).



1.att.

2) Pieņemsim, ka apgalvojums izpildās, ja $n = k$.

3) Pierādīsim, ka apgalvojums izpildās pie $n = k + 1$. Pieņemsim, ka apgabalus, kuros k taisnes sadala plakni, var nokrāsot uzdevumā prasītajā veidā. Novilksim vēl vienu taisni (tad plakni apgabalos sadalīs $k + 1$ taisne), un apgabaliem vienā pusē no tās krāsojumu neaiztiksim, bet otrā pusē mainīsim krāsas uz pretējo. Ja divu apgabalu kopējā mala atrodas uz šīs taisnes, tad apgabaliem ir dažādas krāsas saskaņā ar veikto krāsošanu. Ja apgabalu kopējā mala atrodas uz kādas no pārējām k taisnēm, tad apgabali ir dažādās krāsās saskaņā ar induktīvo pieņēmumu.

4) Secinājums. Ja n dažādas taisnes sadala plakni apgabalos, tad tos var izkrāsot divās krāsās tā, ka nekādi divi apgabali ar kopīgu malu nav izkrāsoti vienādā krāsā.

3. uzdevums

Pierādīt, ka izliekta *n*-stūra diagonāļu skaits ir $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$, ja $n \geq 4$.

Atrisinājums

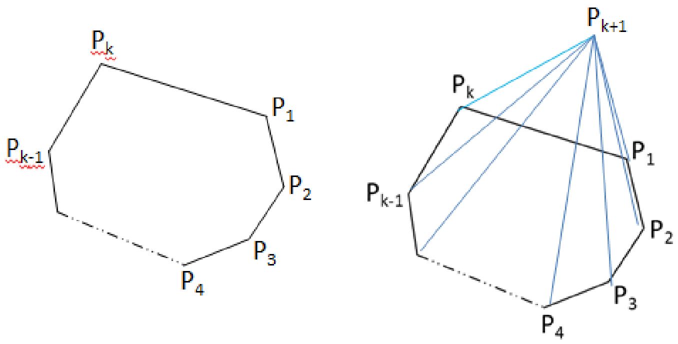
1) Ja $n=4$, tad *n*-stūris ir četrstūris, kuram ir 2 diagonāles jeb $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=\frac{4\cdot 1}{2}=2$.

   Ja $n=5$, tad *n*-stūris ir piecstūris, kuram ir 5 diagonāles jeb $\frac{n\cdot(n-3)}{2}=\frac{5\cdot 2}{2}=5$.

2) Pieņemsim, ka izliektam *k*-stūrim diagonāļu skaits ir $\frac{k\cdot(k-3)}{2}$.

3) Pierādīsim, ka izliektam $k+1$-stūrim diagonāļu skaits ir $\frac{(k+1)\cdot(k+1-3)}{2}=\frac{(k+1)\cdot(k-2)}{2}$.

   Apskatīsim *k*-stūri $P_1P_2 \ldots P_{k-1}P_k$, kuram pievienosim vēl vienu virsotni P_{k+1} (skatīt 2. attēlu):



2.att.

   Seko, ka mums pēc pieņēmuma ir $\frac{k\cdot(k-3)}{2}$ diagonāles plus visas diagonāles, kuras novilktas no virsotnes P_{k+1} un plus mala P_1P_k, kas ir kļuvusi par diagonāli:

$$\frac{k\cdot(k-3)}{2}+(k+1-3)+1=\frac{k\cdot(k-3)}{2}+k-1=\frac{k\cdot(k-3)+2k-2}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k+1)\cdot(k-2)}{2}$$

4) Secinājums. Izliekta *n*-stūra ($n \geq 4$) diagonāļu skaits ir $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

4. uzdevums

Kā zināms, katram cilvēkam ir divi vecāki, katram no tiem atkal divi vecāki utt. Tātad sanāk, ka vecvec...vecāku skaits strauji aug un varētu secināt, ka senatnē dzīvoja daudz vairāk cilvēku nekā tagad. Tomēr ir zināms, ka senākos laikos uz Zemes dzīvoja mazāk cilvēku nekā tagad. Kā to izskaidrot?

Atrisinājums

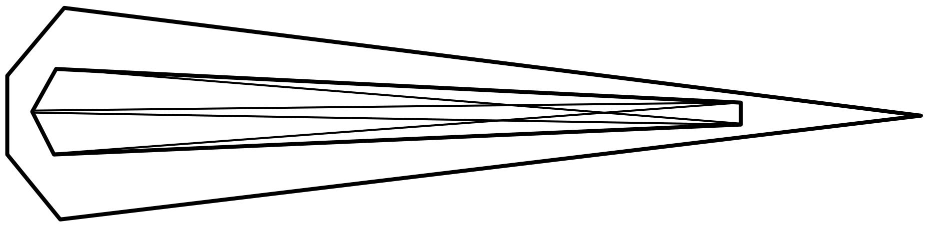
Iedzīvotāju skaita pieaugumu var izskaidrot ar to, ka vienā ģimenē var būt vairāki bērni, bet katram no tiem joprojām ir divi vecāki, arī tiem ir divi vecāki utt. Pie tam, vienam cilvēkam var būt mazāk kā 4 vecvecāki, mazāk kā 8 vecvecvecāki utt.

5. uzdevums

Izdomāt tādu piecstūri P_1, kura iekšienē iezīmēts tāds piecstūris P_2, ka P_2 diagonāļu garumu summa ir vismaz 1,5 reizes lielāka nekā P_1 diagonāļu garumu summa.

Atrisinājums

3. att. parādīts piecstūris, kuram ir divas "garas" diagonāles un tā iekšienē ir piecstūris ar četrām garām diagonālēm. Tāpēc pirmā piecstūra diagonāļu garumu summa ir tuva $2L$, bet otrā $4L$, kur L – liels skaitlis. Tā kā $4L > 1{,}5 \cdot 2L$, tad pie piemērotu piecstūru izvēles uzdevuma prasības ir izpildāmas.



3.att.

6. uzdevums

Grupā ir 20 skolēni: zēni un meitenes. Pirmais zēns draudzējas ar a_1 meitenēm, otrais ar a_2 meitenēm utt. Savukārt pirmā meitene draudzējas ar b_1 zēniem, otrā ar b_2 zēniem utt. (apskatītās draudzības ir tikai grupas ietvaros). Skaitļu a_1, a_2 utt. vidējais aritmētiskais ir a un skaitļu b_1, b_2 utt. vidējais aritmētiskais ir b. Vai var gadīties, ka $a > 3b$?

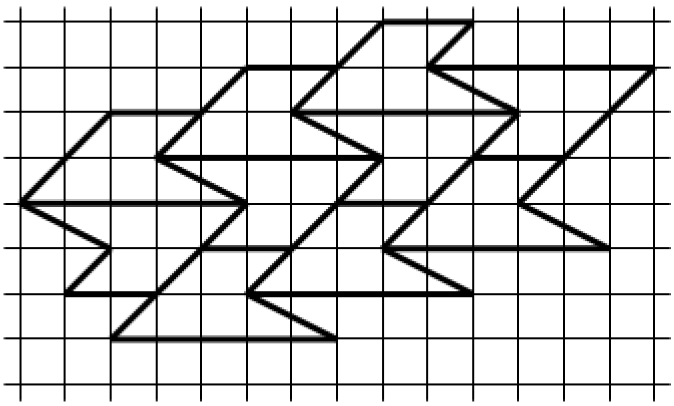
Atrisinājums

Jā, var. Pieņemsim, ka grupā ir 4 zēni un 16 meitenes. Pirmais zēns draudzējas ar vienām 4 meitenēm, otrais ar citām četrām utt. Tad $a_1 = a_2 = \ldots = 4$, savukārt $b_1 = b_2 = \ldots = 1$. Tāpēc $a = 4$, $b = 1$ un $a > 3b$.

7. uzdevums

Izdomāt tādu piecstūri, ar kura kopijām var pilnībā noklāt plakni (bez pārklāšanās un caurumiem), pie tam visas piecstūra malas ir dažāda garuma.

Atrisinājums



4.att.