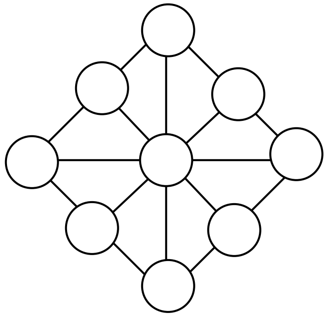
Latvijas 40. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

5. klase

1. Cik reizes diennaktī sakrīt pulksteņa stundu un minūšu rādītāji? (Plkst. 00:00 un 24:00 ieskaitīt vienu reizi.) *Atbildi pamatot!*

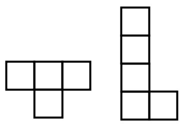
2. 24-stāvu mājā ir lifts, kuram ir divas pogas. Nospiežot vienu pogu, tas paceļas (ja iespējams) 17 stāvus uz augšu, nospiežot otru – nolaižas 8 stāvus uz leju (ja iespējams). Noskaidro, no kura stāva ar šo liftu var nokļūt uz jebkuru citu stāvu šajā mājā. (Lifts nevar uzbraukt augstāk par 24. stāvu un zemāk par 1. stāvu.)

3. 1. zīmējumā katrā aplītī ierakstīt vienu ciparu, katrā aplītī – citu, tā, lai katros trīs aplīšos, kas atrodas uz vienas taisnes, ierakstīto skaitļu summa būtu viena un tā pati.



1. zīm.

4. No 2. zīmējumā redzamajām figūrām salikt taisnstūri ar laukumu 40 rūtiņas. Figūras nedrīkst pārklāties un katra veida figūra jāizmanto vismaz vienu reizi. (Figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas otrādi.)



2. zīm.

5. Kuba katra skaldne sadalīta četros vienādos kvadrātos. Vai šos kvadrātus var nokrāsot **a)** divās; **b)** trīs krāsās tā, ka kvadrāti, kam ir kopīga mala, ir nokrāsoti dažādās krāsās? Katrs kvadrāts pilnībā ir jākrāso vienā krāsā. *Atbildi pamatot!*

6. klase

1. Uz tāfeles uzrakstīti desmit skaitļi

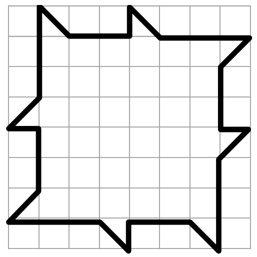
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Alfons nodzēš jebkurus divus no tiem (apzīmēsim tos ar a un b) un to vietā uzraksta skaitli, kas vienāds ar $a+b+2$. Šo operāciju viņš atkārto, kamēr uz tāfeles paliek viens skaitlis.

Pamato, ka neatkarīgi no secības, kādā Alfons izpilda darbības, beigās tiek iegūts viens un tas pats skaitlis. Kāds tas ir?

2. Vai var atrast tādus divus viens otram sekojošus naturālus skaitļus, viens no kuriem dalās ar 3 un kuru
a) ciparu summas atšķiras par 3;
b) ciparu reizinājumi atšķiras par 3?

3. Sagriezt 3. zīmējumā attēloto figūru 20 vienādās mazākās figūrās (figūras var būt pagrieztas vai apgrieztas otrādi).



3. zīm.

4. Vai skaitļus no 100 līdz 200 var sadalīt divās grupās tā, ka skaitļu reizinājumi abās grupās ir vienādi?

5. Una un Ivo, gājienus izdarot pēc kārtas, kvadrāta ar izmēriem 5×5 rūtiņas trīs **tukšās** vienas rindas vai kolonnas **blakus** rūtiņās ieraksta savu vārdu, katru burtu rakstot citā rūtiņā. Uzvar tas spēlētājs, kurš pēdējais ieraksta savu vārdu. Una izdara pirmo gājienu. Kurš spēlētājs vienmēr var panākt savu uzvaru?

Latvijas 40. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

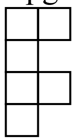
7. klase

1. Naturālā divciparu skaitlī neviens no cipariem nav 0. Pierādīt, ka, dalot šo skaitli ar tā ciparu reizinājumu, dalījums ir vismaz $\frac{11}{9}$.

2. Doti seši nogriežņi ar garumiem 1 cm, 3 cm, 5 cm, 7 cm, 9 cm, 11 cm. Cik dažādos veidos no tiem var izvēlēties trīs nogriežņus tā, ka no tiem var izveidot trijstūri (katra trijstūra mala ir viens vesels nogrieznis)?

3. Pierādīt, ka skaitlis 1234567891011...175176 (pēc kārtas uzrakstīti visi naturālie skaitļi no 1 līdz 176) nav naturāla skaitļa kvadrāts. (Skaitļa kvadrāts ir skaitļa reizinājums pašam ar sevi.)

4. Vai kvadrātā 5 × 5 rūtiņas var iekrāsot **a)** 6 rūtiņas; **b)** 5 rūtiņas tā, lai atlikušajā daļā nevarētu ievietot nevienu 4. zīmējumā redzamo figūru (tā var būt pagriezta vai apgāzta otrādi)?



4. zīm.

5. Una un Ivo, gājienus izdarot pēc kārtas, kvadrāta ar izmēriem 6 × 6 rūtiņas trīs **tukšās** vienas rindas vai kolonnas **blakus** rūtiņās ieraksta savu vārdu, katru burtu rakstot citā rūtiņā. Uzvar tas spēlētājs, kurš pēdējais ieraksta savu vārdu. Una izdara pirmo gājienu. Kurš spēlētājs vienmēr var panākt savu uzvaru?

8. klase

1. Atrast visus naturālos skaitļus, kas nepārsniedz 1000000 un kuri, nosvītrojot to pirmo ciparu, samazinās 36 reizes .

2. Dots trijstūris *ABC* un punkts *P* tā iekšpusē. Pierādi, ka attālumu summa no punkta *P* līdz dotā trijstūra virsotnēm ir lielāka nekā puse no trijstūra perimetra.

3. Doti tādi reāli skaitļi t un a, ka $t^2 - t \cdot \sqrt{t} + a = 0$. Pierādīt, ka $t \geq 4a$.

4. Vai regulāru sešstūri var sadalīt **a)** deviņos; **b)** astoņos vienādos daudzstūros?

5. Rūķītis ir iedomājies skaitļus x_1, x_2, x_3 un x_4, katrs no tiem ir vai nu 0, vai 1. Ja rūķītim pajautā: „Kāds ir *i*-tais skaitlis?” (*i* = 1, 2, 3 vai 4 pēc izvēles), tad viņš pasaka x_i vērtību.

Pierādīt, ka ar 3 jautājumiem pietiek, lai uzzinātu, vai virkne x_1, x_2, x_3, x_4 ir monotona.

Skaitļu virkne x_1, x_2, x_3, x_4 ir monotona, ja tā ir nedilstoša vai neaugoša (t. i., $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ vai $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4$).

Latvijas 40. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

9. klase

1. Dota trapece, kuras pamatu malu garumi ir 3 un 13. Pierādīt, ka to nevar sadalīt piecos vienlielos trijstūros.
(Figūras sauc par vienlielām, ja tām ir vienādi laukumi.)

2. Kvadrāta ar izmēriem 4×4 rūtiņas katra rūtiņu virsotne nokrāsota vienā no divām krāsām. Pierādīt, ka noteikti var atrast trīs punktus, kas nokrāsoti vienā krāsā un atrodas vienādsānu taisnleņķa trijstūra virsotnēs.

3. Doti četri dažādi cipari, neviens no kuriem nav 0. Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir 484. Atrast dotos četrus ciparus.

4. Dota skaitļu virkne $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, kurā $x_0 > 0$ un $x_{n+1} = x_n + \dfrac{2}{x_n}$ visiem $n \geq 0$. Pierādīt, ka $x_{100} > 20$.

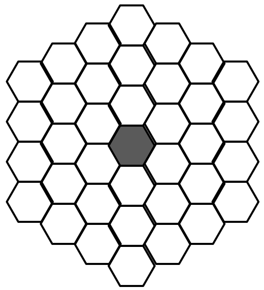
5. Dots izliekts četrstūris. Uzzīmēti četri riņķi, kuru diametri ir četrstūra malas. Pierādīt, ka šie riņķi pilnībā pārklāj doto četrstūri.

10. klase

1. Dots, ka x_1 ir vienādojuma $x^2 + px + q = 0$ sakne, bet x_2 ir vienādojuma $-x^2 + px + q = 0$ sakne. Pierādīt, ka vienādojumam $\dfrac{1}{3}x^2 + px + q = 0$ noteikti ir sakne x_3, kas atrodas starp x_1 un x_2 (t. i., $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ vai $x_2 \leq x_3 \leq x_1$).

2. Trijstūrī *ABC* nogrieznis *CD* ir bisektrise. Caur punktu *C* novilkta riņķa līnija, kas pieskaras malai *AB* punktā *D*. Tā krusto malas *AC* un *BC* attiecīgi punktos *P* un *Q*. Pierādīt, ka $AB || PQ$.

3. Par *n-heksu* sauksim plaknes figūru, kas izveidota no *n* regulāriem sešstūriem tā, ka katram sešstūrim ir kopīga mala ar vismaz vienu citu sešstūri.
Kādam mazākajam n $(n \geq 2)$ eksistē tāds *n-hekss*, ar kuriem nevar pārklāt 5. zīm. attēloto figūru (tā sastāv no regulāriem sešstūriem ar caurumu centrā)?



5. zīm.

4. No pirmajiem 100 naturālajiem skaitļiem izvēlēts 51 skaitlis. Pierādīt, ka no tiem var izvēlēties divus, no kuriem viens dalās ar otru.

5. Vai pa riņķi var uzrakstīt 2013 naturālus skaitļus tā, lai jebkuru divu blakus esošu skaitļu attiecība būtu 2, 3, 12 vai 18 ?

Latvijas 40. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumi

11. klase

1. Pierādīt, ka nav tāda naturāla skaitļa *n*, ka skaitlis n^2-3n-1 dalās ar 169.

2. Vai eksistē regulārs daudzstūris, kuram vienas diagonāles garums ir vienāds ar divu citu diagonāļu garumu summu?

3. Doti dažādi nepāra naturāli skaitļi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Neviens no tiem nedalās ne ar vienu pirmskaitli, kas lielāks kā 5. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2.$$

4. Kādā valstī ir 2013 pilsētas, no katras uz katru var aizlidot ar lidmašīnu. Dažus no šiem reisiem apkalpo aviokompānija A, pārējos – aviokompānija B (ir iespējams, ka no pilsētas X uz pilsētu Y lido aviokompānijas A lidmašīna, bet no Y uz X – aviokompānijas B lidmašīna).
Pierādīt, ka aviokompāniju atbildību par reisiem iespējams saplānot tā, ka ceļotājs, izlidojot no jebkuras pilsētas Z, pa ceļam apmeklējot vienu vai vairākas pilsētas un pēc tam atgriežoties pilsētā Z, **noteikti** būs lidojis ar abu aviokompāniju lidmašīnām, neatkarīgi no tā, kādu maršrutu viņš būs izvēlējies un kura ir sākotnējā pilsēta Z.

5. Uz galda virsmas, kurai ir taisnstūra forma, izvietoti vairāki vienādi kvadrātveida papīra gabaliņi, kuru malas ir paralēlas galda malām (kvadrātiņi var arī pārklāties). Pierādīt, ka galdā var iedurt dažas adatas tā, ka katrs papīra gabaliņš būs piesprausts pie galda tieši ar vienu adatu.

12. klase

1. Atrisināt reālos skaitļos vienādojumu $\lg x \cdot \lg(4-x)=\frac{1}{4}$.

2. Trijstūrī *ABC* punkti *M*, *N* un *K* ir attiecīgi malu *AB*, *BC* un *CA* viduspunkti. Ir novilktas trīs riņķa līnijas: caur punktiem *K*, *A*, *M*; caur punktiem *M*, *B*, *N*; caur punktiem *N*, *C*, *K*. Pierādīt, ka visas novilktās riņķa līnijas krustojas vienā punktā.

3. Pierādīt, ka neeksistē tādi naturāli skaitļi x, y, z, ka izpildās vienādība $6^x+13^y=29^z$.

4. Kādas valodas alfabētā ir *i* patskaņi ($i \geq 2$) un *j* līdzskaņi ($j \geq 2$). Šajā valodā par vārdu sauc jebkuru galīgu burtu (patskaņu un līdzskaņu) virkni, kas satur vismaz vienu burtu un kurā nekādi divi patskaņi neparādās pēc kārtas un pēc kārtas uzrakstīti līdzskaņi ir ne vairāk kā divi (piemēram, ja „A” ir patskanis, bet „B” – līdzskanis, tad, piemēram, „ABBA” ir vārds, turpretī „BAAB” un „ABBBA” nav vārdi).
Ar $S(n)$ apzīmēsim visu to vārdu skaitu, kuri sastāv no *n* burtiem, $n \geq 1$.
Pierādīt, ka visiem naturāliem skaitļiem *n* ir spēkā vienādība

$$S(n+3)=i\cdot j\cdot S(n+1)+i\cdot j^2\cdot S(n).$$

5. Dota kvadrātisku rūtiņu plakne, katras rūtiņas malas garums ir 1. Pierādīt, ka eksistē trijstūris, kura virsotnes atrodas šīs plaknes rūtiņu virsotnēs un jebkuru divu tā malu garumi atšķiras ne vairāk kā par $\frac{1}{2013\cdot\sqrt{P}}$, kur *P* ir šī trijstūra perimetrs.