Latvijas 63. matemātikas olimpiādes
3. posma uzdevumi

9. klase

1. Atrast tādas ciparu *a*, *b*, *c*, *d* vērtības, lai izpildītos vienādība $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2013$.

(Pieraksts $\overline{xyzt}$ nozīmē, ka četrciparu skaitlī ir *x* tūkstoši, *y* simti, *z* desmiti un *t* vieni.)

2. Doti trīs regulāri trijstūri OAB, OCD un OEF (virsotnes norādītas pulksteņrādītāja secībā), kuru malu garumi var atšķirties. Punkti *A*, *C*, *E* neatrodas uz vienas taisnes; punkti *B*, *D*, *F* arī neatrodas uz vienas taisnes. Pierādīt, ka $\Delta ACE=\Delta BDF$.

3. Dota virkne $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kur $a_1=a_2=1$ un visiem $n>2$ izpildās

$$a_{n+1}=\left[\frac{2a_n+a_{n-1}}{3}\right]+4.$$

Aprēķināt a_{2013}.

([*x*] ir veselā daļa no *x* – lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz *x*; piemēram, [3]=3, [4,6]=4, [0,2]=0 u.tml.)

4. Divas komandas savā starpā izspēlējušas vairākas (vairāk nekā vienu) spēles. Par zaudējumu komanda saņem *n* punktus (*n* – naturāls skaitlis), bet par uzvaru *n*+3 punktus. Neizšķirtu rezultātu nav. Pēc spēļu beigām izrādījās, ka vienai komandai ir par vienu uzvaru vairāk nekā otrai. Zināms, ka viena no komandām kopsummā ieguva 92 punktus.
Cik punktus ieguva otra komanda?

5. Kādu lielāko skaitu 1. zīm. attēloto figūru var izgriezt no rūtiņu kvadrāta $n\times n$, kuram izņemtas četras stūra rūtiņas: **a)** ja $n=6$ (skat. 2. zīm.), **b)** ja $n=7$ (skat. 3. zīm.). Griezuma līnijām jāiet pa rūtiņu malām, 1. zīm. figūra var būt pagriezta vai apgriezta spoguļattēlā.

10. klase

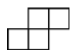
1. Pierādīt, ka vienādojumam $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a^2+b^2}=\frac{1}{2}$ nav atrisinājuma naturālos skaitļos.

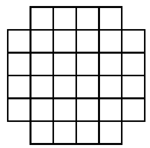
2. Četrstūris *ABCD* ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles *AC* un *BD* ir perpendikulāras un krustojas punktā *E*. Malas *AB* viduspunkts ir *F*. Pierādīt, ka $EF\perp CD$.

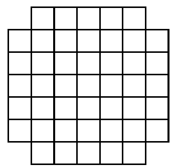
3. Funkcija $f(x)=(x+10)x(x-1)(x-11)$ definēta visām reālām *x* vērtībām. Atrast mazāko iespējamo $f(x)$ vērtību.

4. Dota Fibonači skaitļu virkne $x_1=x_2=1$, $x_{i+2}=x_i+x_{i+1}$.
Pierādīt, ka šajā virknē ir bezgalīgi daudz skaitļu, kas nav naturāla skaitļa kvadrāti.

5. Dota rūtiņu lapa ar izmēriem $n\times m$ (*n*, *m* – naturāli skaitļi) rūtiņas. Divi spēlētāji spēlē šādu spēli, pēc kārtas izdarot pa vienam gājienam. Ar vienu gājienu atļauts veikt taisnu griezienu, kas sākas kādā lapas malā un iet pa rūtiņu malām, pie tam griezuma garumam jābūt naturālam skaitlim. Zaudē tas spēlētājs, pēc kura gājiena lapa tiek sagriezta divos atsevišķos gabalos. Kādām *n* un *m* vērtībām, pareizi spēlējot, vienmēr var uzvarēt pirmais spēlētājs, un kad – otrais (spēli vienmēr sāk pirmais spēlētājs)?


1. zīm.


2. zīm.


3. zīm.

Latvijas 63. matemātikas olimpiādes
3. posma uzdevumi

11. klase

1. Pierādīt, ka nav tādas naturālas n vērtības, ka $n^2+4n+16$ dalās ar 36.

2. Dots vienādsānu trijstūris ABC, kuram $AB = AC$ un $\angle BAC = 100°$. Leņķa ABC bisektrise krusto malu AC punktā D. Pierādīt, ka $AD + BD = BC$.

3. Vienādojuma $x^3-44x^2+623x-2860=0$ saknes ir taisnstūra paralēlskaldņa malu garumi, kas izteikti centimetros.
Aprēķināt šī paralēlskaldņa pilnas virsmas laukumu un tilpumu.

4. Diviem vienādiem kvadrātiem ar malas garumu 40 cm ir kopīgs centrs. Vai abu kvadrātu kopīgās daļas laukums noteikti ir lielāks nekā **a)** 1250 cm^2, **b)** 1300 cm^2?

5. Valstī Alfa ir n pilsētas, $n \geq 2$. Dažas no šīm pilsētām ir savienotas ar dažām citām ar ceļiem. Ir zināms, ka katrs ceļš savieno tieši divas dažādas pilsētas, katras divas pilsētas savieno ne vairāk kā viens ceļš, turklāt pa izbūvētajiem ceļiem no jebkuras pilsētas ir iespējams aizbraukt uz jebkuru citu vienā vienīgā veidā.
a) Pierādīt, ka ir vismaz viena pilsēta, no kuras iziet tieši viens ceļš.
b) Pierādīt, ka pilsētas var sanumurēt ar skaitļiem 1, 2, …, n tā, lai jebkuru divu pilsētu, kuras ir savienotas ar ceļu, numuru reizinājums būtu pāra skaitlis.

12. klase

1. Ap šaurleņķu trijstūri ABC apvilkta riņķa līnija. Loka AB (kuram nepieder punkts C) viduspunkts ir M, bet loka AC (kuram nepieder punkts B) viduspunkts ir N. Nogriežņi BN un CM krustojas punktā D. Pierādīt, ka $AD \perp MN$.

2. Atrisināt vienādojumu sistēmu $\begin{cases} \sin x + \cos y = \frac{3}{2} \operatorname{tg} z \\ \sin y + \cos x = \frac{3}{2} \operatorname{ctg} z \end{cases}$.

3. Funkcija f apmierina šādas prasības:
a) f ir definēta visiem veseliem nenegatīviem skaitļiem un tās vērtības ir veseli skaitļi;
b) katram n (n – vesels nenegatīvs skaitlis) izpildās sakarība
$$f(n)\cdot(f(n+1)-2) = 4n^2-1.$$
Atrast visas šādas funkcijas f un pierādīt, ka citu nav.

4. Ar d_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, apzīmēsim visus naturālā skaitļa n naturālos dalītājus, pie tam $d_1 < d_2 < d_3 < \ldots < d_k$.
Dots, ka $d_3^2 d_4^2 \left(d_3^2 + d_4^2\right) = n^2$. Atrast visas iespējamās n vērtības.

5. Uz tāfeles uzrakstīta burtu virkne, kas satur tikai burtus a, b un c. Ar šo virkni atļauts veikt šādus gājienus:
- patvaļīgi mainīt uzrakstīto burtu secību;
- ja virknes galā ir uzrakstīts fragments *ab*, to drīkst nodzēst;
- fragmentu *ba* aizstāt ar fragmentu *aabbcc*;
- fragmentu *bbc* aizstāt ar *a*;
- izsvītrot jebkurus trīs vienādus pēc kārtas uzrakstītus burtus.

Vai, atkārtojot vairākus šādus gājienus, iespējams iegūt virkni *aba*, ja sākotnēji ir uzrakstīta virkne **1)** *abba*; **2)** *aabbcabaab*?