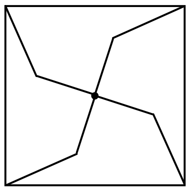
Īsi atrisinājumi

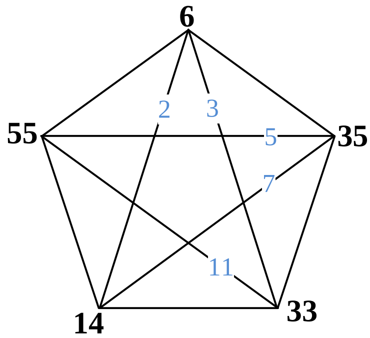
5.1. Jā, piemēram, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 4.

Piezīme. Uzdevumam ir arī vairāki citi atrisinājumi.

5.2. Skat., piemēram, 1. zīm.



1. zīm.



2. zīm.

5.3. Atbilde: piemēram, 142835.

Ievērosim, ka 14 dalās ar 7, tātad arī 140000 dalās ar 7; 28 un 2800 dalās ar 7; 35 dalās ar 7. Tātad 140000+2800+35=142835 dalās ar 7. Uzdevuma prasības apmierina arī daudzi citi skaitļi.

5.4. Skat., piemēram, 2. zīm.

Uzdevuma atrisinājumu var iegūt, piemēram, šādi. Vispirms uz katras no diagonālēm uzraksta dažādus pirmskaitļus, un pēc tam katrā virsotnē ieraksta skaitļus, kas vienādi ar to pirmskaitļu reizinājumu, kas uzrakstīti uz no šīs virsotnes izejošajām diagonālēm. Tādējādi katras diagonāles galapunktos ierakstītajiem skaitļiem LKD vienāds ar uz šīs diagonāles uzrakstīto pirmskaitli, tātad lielāks nekā 1. Savukārt no virsotnēm, kas atrodas vienas malas galapunktos, iziet dažādas diagonāles, tāpēc tajās ierakstīto skaitļu LKD=1.

Piezīme. Uzdevuma atrisinājumam pietiek parādīt vienu pareizu piemēru.

5.5. Atbilde: nē, nevar.

Pieņemsim, ka to var izdarīt. Tad no katra no 13 punktiem iziet nepāra skaits nogriežņu. Tātad kopējais nogriežņu galapunktu skaits ir nepāra skaitlis, bet tas ir pretrunā ar to, ka nogrieznim ir tieši divi galapunkti.

6.1. Atbilde: piemēram, 2, 3, 9, 18.

Piezīme. Uzdevumam ir arī vairāki citi atrisinājumi.

6.2. a) Jā, piemēram: vispirms piecos gājienos iegūst

$$(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9,10) \to 1, 1, 1, 1, 1.$$

Tad četros gājienos iegūst prasīto:

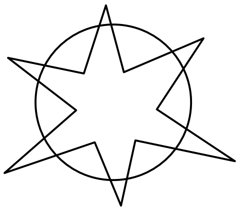
$$1, 1, 1, 1, 1 \to 0, 0, 1 \to 0, 1 \to 1.$$

b) Ievērosim, ka, veicot doto pārveidojumu, uz tāfeles palikušo skaitļu summas paritāte nemainās (jo $(a+b)$ un $(a-b)$ ir vienas paritātes skaitļi). Sākotnējo skaitļu summa 55 ir nepāra skaitlis; tātad rezultātā nevar iegūt pāra skaitli 0.

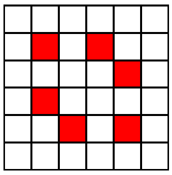
6.3. a) Skat., piem., 3. zīm.

b) Nē, nevar. Lai 13-stūra malas krustotu riņķa līniju, jābūt virsotnēm, kas atrodas riņķa iekšpusē, un virsotnēm, kas atrodas riņķa ārpusē. Ar A_1 apzīmēsim 13-stūra $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}A_{12}A_{13}$ virsotni, kas atrodas riņķa iekšpusē. Lai mala A_1A_2

krustotu riņķa līniju, virsotnei A_2 jāatrodas riņķa ārpusē. Līdzīgi virsotnei A_3 jāatrodas riņķa iekšpusē, virsotnei A_4 – riņķa ārpusē, virsotnei A_5 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_6 – riņķa ārpusē, virsotnei A_7 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_8 – riņķa ārpusē, virsotnei A_9 – riņķa iekšpusē, virsotnei A_{10} – riņķa ārpusē, virsotnei A_{11} – riņķa iekšpusē, virsotnei A_{12} – riņķa ārpusē, virsotnei A_{13} – riņķa iekšpusē. Bet tādā gadījumā 13-stūra malu A_1A_{13} riņķa līnija nekrusto.



3. zīm.



4. zīm.

6.4. a) Ja pirmais cipars ir 1, tad, pierakstot klāt divciparu skaitli, ar ko dalās 100, piemēram, 25, iegūstam meklēto skaitli 125.

b) Spriežot līdzīgi un izmantojot jau a) gadījumā atrasto 3 ciparu skaitli, var iegūt skaitli 1125, kas apmierina uzdevuma prasības.

c) Var pamanīt, ka 90000 dalās ar 1125, tāpēc der skaitlis 91125.

Piezīme. Uzdevumam katrā apakšpunktā ir arī vairāki citi atrisinājumi.

6.5. Atbilde: var iekrāsot gan 7, gan 6 rūtiņas tā, lai uzdevuma prasības būtu izpildītas.

4. zīm. parādīts, kā var iekrāsot 6 rūtiņas; šajā zīmējumā iekrāsojot vēl vienu jebkuru rūtiņu, uzdevuma prasības tiks apmierinātas. Ir arī citi veidi, kā var iekrāsot 7 rūtiņas.

7.1. Izveidosim tabulu, ar ko pārī var būt apvienots katrs no dotajiem skaitļiem.

1	3, 8, 15
2	7, 14
3	1, 6, 13
4	5, 12
5	4, 11
6	3, 10
7	2, 9, 18
8	1, 17
9	7, 16

10	6, 15
11	5, 14
12	4, 13
13	3, 12
14	2, 11
15	1, 10
16	9
17	8
18	7

Ievērosim, ka 18 var būt apvienots pārī tikai ar 7, 17 ar 8 un 16 ar 9. Tālāk pakāpeniski secinām, ka 2 ir apvienots ar 14, 11 ar 5, 4 ar 12, 13 ar 3, 6 ar 10 un 1 ar 15.

Atbilde: 1 ir apvienots pāri ar 15.

7.2. Atbilde: 162.

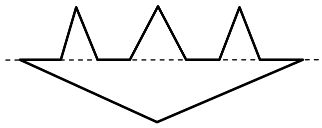
$111=3\cdot37$, tāpēc vienam no skaitļiem x, x+1 vai x+2 jādalās ar 37. (Starp trīs pēc kārtas sekojošiem naturāliem skaitļiem viens noteikti dalās ar 3, tāpēc dotais reizinājums vienmēr dalās ar 3.)

No 1 līdz 2013 ir 54 skaitļi, kas dalās ar 37 (lielākais 1998).

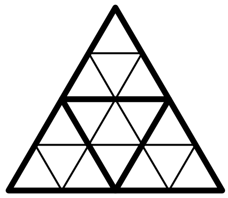
Tātad 54 veidos var izvēlēties tādu x, kas dalās ar 37, 54 veidos – tādu x, ka x+1 dalās ar 37 un 54 veidos – tādu x, ka x+2 dalās ar 37, t.i., pavisam ir 54+54+54=162 tādi skaitļi x, ka $x(x+1)(x+2)$ dalās ar 111.

7.3. a) Ja 11-stūra 8 virsotnes atrodas uz vienas taisnes, tad 3 virsotnes uz tās neatrodas. Apzīmēsim tās ar A, B un C. Tad no pārējām 8 virsotnēm daļa atrodas starp A un B, daļa – starp B un C un daļa – starp C un A. Pēc Dirihlē principa kādā no šīm daļām ir vismaz 3 virsotnes un tās visas atrodas uz vienas taisnes – pretruna.

b) Jā, var; skat. piemēram, 5. zīm.



5. zīm.



6. zīm.

7.4. Pieņemsim, ka to var izdarīt. Ievērosim, ka tādā gadījumā visu skaitļu paritātes ir vienādas. Ja visi skaitļi ir nepāra, tad tiem visiem pieskaitīsim 1, uzdevumā dotā īpašība joprojām izpildīsies (blakus esošo skaitļu starpība nemainīsies). Ja visi skaitļi ir pāra skaitļi (sākumā dotie vai iepriekš aprakstītās darbības rezultātā iegūtie), izdalīsim tos visus ar 2.

Tagad blakus stāvošo skaitļu starpības būs 3, 5, 7 vai 9. Ievērosim, ka tagad blakus stāvošo skaitļu paritātes ir dažādas, bet 13 skaitļu gadījumā tas nav iespējams.

7.5. Sadalīsim sākotnējo trijstūri četros vienādmalu trijstūros ar malas garumu 2 (skat. 6. zīm.). Tā kā ir četri šādi trijstūri (kas nepārklājas), un tajos ierakstīti 9 piecinieki, tad kādā no šiem trijstūriem būs vismaz trīs piecinieki, tāpēc tajā ierakstīto skaitļu summa būs vismaz $5+5+5+3=18$, k.b.j.

8.1. Ievērosim, ka $8999999 = 9000000 - 1 = 3000^2 - 1^2 = (3000-1)\cdot(3000+1) = 2999\cdot 3001$.

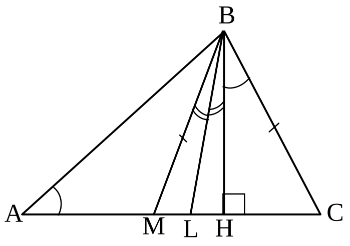
8.2. Atbilde: $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 60°$.

Tā kā $\angle MBL = \angle LBH$ un BL ir bisektrise, tad $\angle CBH = \angle ABM = \angle BAC$ un ΔAMB ir vienādsānu un BM = AM (skat. 7. zīm.).

Tā kā MC=AM=BM=BC, tad ΔMBC ir vienādmalu un $\angle MBC = \angle BCM = \angle CMB = 60°$.

BH ir vienādmalu trijstūra MBC augstums, tātad arī bisektrise, tāpēc $\angle BAC = \angle CBH = 60° : 2 = 30°$.

$\angle ABC = 180° - (\angle BAC + \angle ACB) = 180° - (30° + 60°) = 90°$.



7. zīm.

2^6	2^7	2^2
2^1	2^5	2^9
2^8	2^3	2^4

8. zīm.

8.3. Atbilde: 8375.

Pavisam ir 9000 četrciparu skaitļi. No tiem $5^4 = 625$ skaitļi satur tikai nepāra ciparus. Tātad $9000 - 625 = 8375$ četrciparu skaitļu pierakstā ir vismaz viens pāra cipars.

8.4. To var izdarīt, piemēram, tā, kā parādīts 8. zīm.

Izmantojot pakāpju īpašību $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, atrisinājumu var iegūt, tabulā ierakstot pakāpes ar vienādām bāzēm tā, lai kāpinātāju summa katrā rindiņā un katrā kolonnā būtu viena un tā pati.

8.5. a) Sanumurēsim pozīcijas no 1 līdz 20. Mums jāpanāk, ka pozīcijās no 1 līdz 10 stāv zēni, bet no 11 līdz 20 – meitenes.

Aplūkosim pirmo pozīciju. Ja tur stāv zēns, tad viss jau kārtībā. Ja meitene, tad kādā no pozīcijām 2 līdz 11 noteikti stāv kāds zēns (jo vēl ir tikai 9 meitenes), tātad to var samainīt vietām ar 1. pozīcijā stāvošo meiteni. Šādā veidā pirmajā solī ar vienu vai nevienu maiņu var panākt, ka pirmajā pozīcijā stāv zēns.

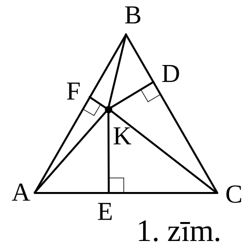
Tālāk otrajā solī tieši tādā pašā veidā panāk, ka otrajā pozīcijā stāv zēns, trešajā solī – ka trešajā pozīcijā stāv zēns utt.

Ar 10 soļiem, t.i., ar ne vairāk kā 10 maiņām var panākt, ka visās pozīcijās no 1 līdz 10 stāv zēni.

b) Aplūkosim sākuma situāciju, kad meitenes stāv pozīcijās no 1 līdz 10, bet zēni – pozīcijās no 11 līdz 20. Katrā maiņā piedalās tikai viens zēns (2 zēnu mainīšana vietām neko nemaina), tāpēc pēc 9 maiņām noteikti būs vismaz viens zēns, kas savu vietu nebūs mainījis, tātad joprojām atradīsies kādā no pozīcijām no 11 līdz 20.

9.1. Jā, piem., $111111111^2 = 12345678987654321$.

9.2. Apzīmēsim dotā regulārā trijstūra *ABC* malas garumu ar a un augstumu ar h (skat. 1.zīm.). Tad $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot KD + \frac{1}{2}a \cdot KE + \frac{1}{2}a \cdot KF = \frac{1}{2}a \cdot (KD + KE + KF)$. No otras puses $S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h$. Tātad $KD + KE + KF = h$ neatkarīgi no punkta K izvēles.



1. zīm.

9.3. Ja a un b, $a \geq b$ ir taisnstūra malu garumi, tad $ab = 2a + 2b$. Pārveidojot, iegūstam $ab - 2a - 2b + 4 = 4$ jeb $(a-2)(b-2) = 4$. Iegūtajam vienādojumam naturālos skaitļos ir divi atrisinājumi:

- $a - 2 = b - 2 = 2$ jeb $a = b = 4$;
- $a - 2 = 4$ un $b - 2 = 1$ jeb $a = 6$ un $b = 3$.

9.4. Tā kā visi a_i (i=1, 2, ..., 2013) ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1}, Tātad mazākā iespējamā skaitļu a_i vērtība ir 2. Viegli pārbaudīt, ka $a_1 = a_2 = ... = a_{2013} = 2$ apmierina dotās nevienādības, tāpēc summas $a_1 + a_2 + ... + a_{2013}$ mazākā iespējamā vērtība ir $2 + 2 + ... + 2 = 2 \cdot 2013 = 4026$.

9.5. No trīs uzdevumiem var izveidot 8 dažādus atrisināto uzdevumu „komplektus" (t.sk., neviens atrisināts uzdevums). Ja katru „komplektu" būtu atrisinājuši ne vairāk kā 12 skolēni, tad skolēnu kopējais skaits būtu ne vairāk kā $12 \cdot 8 = 96 < 100$. Tātad ir vismaz 13 skolēni, kas izrēķinājuši vienus un tos pašus uzdevumus.

Piezīme. Dotā uzdevuma risinājumā izmantots Dirihlē princips.

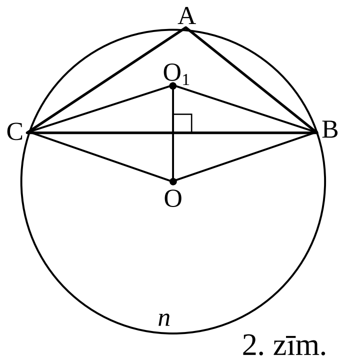
10.1. Tā kā visi a_i (i=1, 2, ..., 10) ir naturāli skaitļi, to mazākā iespējamā vērtība ir 1. Ja kāds no dotajiem skaitļiem $a_k = 1$, tad nevienādība $a_k = 1 > \sqrt{a_{k+1}}$ nav patiesa nevienam naturālam skaitlim a_{k+1}. Tātad mazākā iespējamā skaitļu a_i vērtība ir 2. Viegli pārbaudīt, ka $a_1 = 2$,

$a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $a_4 = 5$, $a_5 = 6$, $a_6 = 7$, $a_7 = 8$, $a_8 = 9$, $a_9 = 10$, $a_{10} = 11$ apmierina dotās nevienādības. Tā kā tie ir mazākie dažādie naturālie skaitļi, kas apmierina dotās nevienādības, tad summas $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ mazākā iespējamā vērtība ir

$$2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=65.$$

10.2. Atbilde: 36°, 36°, 108°.

Tā kā ΔABC apvilktās un ievilktās riņķa līniju centri ir simetriski vienu trijstūra malām (apzīmēsim to ar BC; skat. 2. zīm.), tad viens no tiem atrodas ΔABC iekšpusē, bet otrs – ārpusē. Tā kā ievilktās riņķa līnijas centrs O_1 vienmēr atrodas trijstūra iekšpusē, tad apvilktās riņķa līnijas centrs O atrodas ΔABC ārpusē un ΔABC ir platleņķa trijstūris.



2. zīm.

OC=OB kā apvilktās riņķa līnijas rādiusi, tad ΔBOC ir vienādsānu. Apzīmēsim ∠OCB=∠OBC=x. Tad ∠BOC=180°–2x=∪BAC.

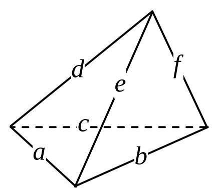
Tā kā O_1 ir simetrisks O attiecībā pret taisni BC, tad ∠O_1BC=∠OBC=x un ∠O_1CB=∠OCB=x.

Ievilktās riņķa līnijas centrs atrodas bisektrišu krustpunktā, tāpēc ∠CBO_1=∠O_1BA=x un ∠BCO_1=∠O_1CA=x.

Apskatām ΔABC leņķus: $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BnC = \frac{1}{2}(360° - (180° - 2x)) = 90° + x$, ∠ACB=∠CBA=2$x$. Tad 90°+$x$+2$x$+2$x$=180° jeb 5$x$=90° un x=18°. Tātad ∠ACB=∠CBA=36°, ∠BAC=108°.

10.3. Apzīmēsim piramīdas šķautņu garumus kā parādīts 3. zīm.

Pieņemsim, ka a, b, c, d, e, f ir dažādi skaitļi. Tā kā visu skaldņu perimetri ir vienādi, tad



3. zīm.

$$\begin{cases} a+b=d+f \\ a+c=e+f \\ b+c=d+e \end{cases}$$

Saskaitot pirmos divus vienādojumus un no tiem atņemot trešo vienādojumu, iegūstam 2a = 2f jeb a = f – pretruna.

10.4. Pieņemsim, ka n ir skaitļa 2^{2013} ciparu skaits, m – skaitļa 5^{2013} ciparu skaits. Tad $10^{n-1} < 2^{2013} < 10^n$ un $10^{m-1} < 5^{2013} < 10^m$. Sareizināsim šīs nevienādības: $10^{n+m-2} < 10^{2013} < 10^{n+m}$. Tātad $n+m-2 < 2013 < n+m$ un vienīgā iespējamā $n+m$ vērtība (t.i., uzrakstīto ciparu skaits) ir 2014.

10.5. No septiņiem dažādiem skaitļiem var izveidot (6·7):2=21 dažādus pārus. Dotie skaitļi ir dažādi, pie tam nav mazāki kā 1 un nav lielāki kā 21, tāpēc divu šādu skaitļu starpības vērtība ir vismaz 1 un nepārsniedz 21-1=20. Tā kā starpības var pieņemt tikai 20 dažādas vērtības, bet pavisam var izveidot 21 dažādu skaitļu pāri, tad vismaz divu pāru skaitļu starpības būs vienādas.

11.1. Atbilde: atrisinājumi ir (0; 0) un (1; 0).

Pārveidosim vienādojumu formā

$$x(x-1) = y^2$$

Ja $x = 0$ vai $x = 1$, tad $y = 0$ un atrisinājums eksistē.

Pieņemsim, ka $x > 1$. Tad ir spēkā stingrā nevienādība

$$(x-1)^2 < x(x-1) < x^2 .$$

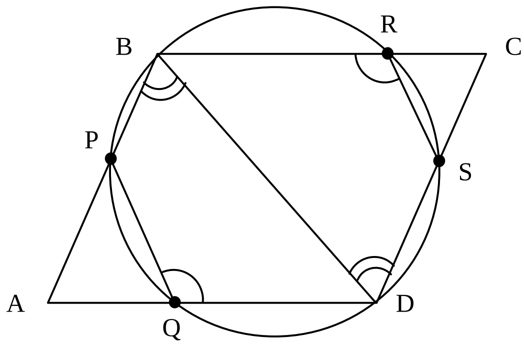
Tā kā $x(x - 1)$ atrodas starp divu secīgu veselu skaitļu kvadrātiem, tad tas nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

Līdzīgi, ja $x < 0$, tad ir spēkā stingrā nevienādība

$$x^2 < x(x-1) < (x-1)^2 .$$

Tātad arī šajā gadījumā $x(x - 1)$ nevar būt vesela skaitļa kvadrāts.

11.2. Novilksim diagonāli BD; apzīmēsim $\angle PQD = \alpha$ (skat. 4. zīm.). Tā kā četrstūris PQDB ir ievilkts riņķa līnijā, tad $\angle PBD = 180° - \angle PQD = 180° - \alpha$. No tā, ka ABCD ir paralelograms un $AB \parallel CD$ seko, ka $\angle SDB = \angle PBD = 180° - \alpha$. Četrstūris SRBD arī ir ievilkts riņķa līnijā, tāpēc $\angle SRB = 180° - \angle SDB = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$.



4. zīm.

Atliek ievērot, ka taisnes PQ un RS veido vienādus leņķus α ar paralēlām taisnēm AD un BC, tāpēc tās arī ir paralēlas.

11.3. Var rīkoties, piemēram, šādi.

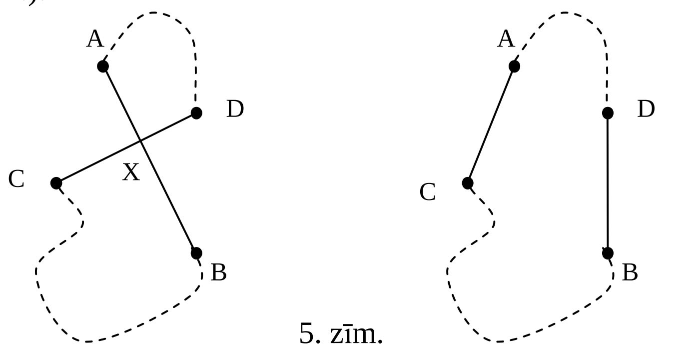
Vispirms katrā svaru kausā novieto trīs monētas. Ja svari ir līdzsvarā, tad katra 9 g smagā monēta ir savā kausā. Tad izvēlas divas monētas no viena kausa un sver vēlreiz. Ja to masas ir vienādas, tad atlikusī monēta sver 9 g; ja nē, tad vieglākā no tām sver 9 g.

Ja pirmajā svēršanā viens svaru kauss (apzīmēsim to ar A) bija vieglāks, tad abas 9 g monētas ir šajā svaru kausā. Tad izvēlas divas monētas no kausa A un sver vēlreiz. Ja svari ir līdzsvarā, tad atrastas abas 9 g monētas, pretējā gadījumā vieglākā no tām sver 9 gramus.

11.4. Apzīmēsim $F(x) = P(x) - 2000$. Tādā gadījumā a, b, c, d ir polinoma $F(x)$ saknes un $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)R(x)$.

Ja $P(n) = 2013$, tad $F(n) = 13 = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)R(n)$. Taču skaitli 13 nevar izteikt kā ne mazāk kā 4 dažādu veselu skaitļu reizinājumu.

11.5. Aplūkosim visas iespējamās slēgtās lauztās līnijas, kas katra sastāv no n posmiem un visi tās n lauzuma punkti ir dotajos punktos. Pierādīsim, ka no tām lauztā līnija ar vismazāko perimetru arī ir meklētais n-stūris. Pieņemsim pretējo, ka šādai lauztai līnijai kādi divi posmi AB un CD krustojas punktā X, pie tam lauztā līnija turpinās no punkta A uz D un no punkta B uz C (skat. 5. zīm.):



5. zīm.

Izdzēšam nogriežņus AB un CD, un uzzīmējam nogriežņus AC un BD. Pierādīsim, ka lauztās līnijas perimetrs samazinājās.

No trijstūra nevienādības seko, ka $\mathrm{AC} < \mathrm{AX} + \mathrm{XC}$ un $\mathrm{BD} < \mathrm{BX} + \mathrm{XD}$. Tāpēc $\mathrm{AC} + \mathrm{BD} < (\mathrm{AX} + \mathrm{XC}) + (\mathrm{BX} + \mathrm{XD}) = (\mathrm{AX} + \mathrm{BX}) + (\mathrm{XC} + \mathrm{XD}) = \mathrm{AB} + \mathrm{CD}$, un jaunās lauztās līnijas perimetrs ir mazāks nekā iepriekšējās, kas ir pretrunā ar pieņēmumu.

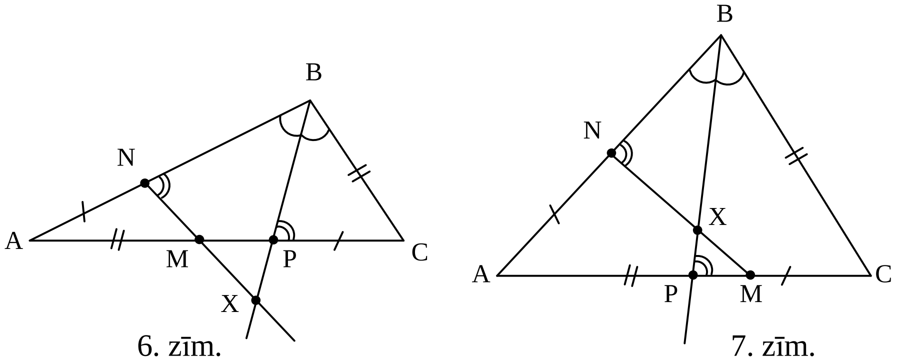
12.1. Pārveidosim doto nevienādību:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > \frac{1}{4(a+b)} \Leftrightarrow a+b-\frac{1}{2(a+b)} > 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a+b)^2 - 1 + \frac{1}{4(a+b)^2} > 4ab \Leftrightarrow$$

$$(a-b)^2 + \frac{1}{4(a+b)^2} > 1.$$

Tā kā a un b ir divi dažādi naturāli skaitļi, tad $(a-b)^2 \geq 1$ un $\frac{1}{4(a+b)^2} > 0$, līdz ar to pēdējā nevienādība ir patiesa. Tā kā tika veikti ekvivalenti pārveidojumi, tad arī visas iepriekšējās, t.sk. dotā, nevienādības ir patiesas, k.b.j.

12.2. No bisektrises īpašības iegūstam $\frac{AB}{AP} = \frac{BC}{PC}$. Tā kā $AM = BC$ un $AN = PC$, tad ir spēkā $\frac{AB}{AP} = \frac{AM}{AN}$. Tāpēc $\Delta ABP \sim \Delta AMN$. No tā seko, ka $\angle ANM = \angle APB$. Savukārt $\angle BNX = 180° - \angle ANM$ un $\angle BPC = 180° - \angle APB$, tāpēc $\angle BNX = \angle BPC$. No tā iegūstam vajadzīgo pēc pazīmes *ll*.



6. zīm. 7. zīm.

Piezīme: punkts *M* var atrasties dažādās pusēs no P, kā arī sakrist ar to. Tomēr tas nekādi neietekmē uzdevuma risinājumu (piem., sk. 6. un 7. zīm.).

12.3. Ievērosim, ka $n^2 + 3n + 3 \equiv 1^2 + 3 + 3 \equiv 0 \pmod 7$. Tātad skaitlis $n^2 + 3n + 3$ dalās ar 7 un tā pirmreizinātāji var būt tikai skaitlis 7 vai arī tādi pirmskaitļi, kas nepārsniedz $\frac{n^2+3n+3}{7}$.

Pamatosim, ka $7 < n^2$ un $\frac{n^2+3n+3}{7} < n^2$.

Tā kā $n \equiv 1 \pmod 7$ un $n > 1$, tad $n \geq 8$. Taču tad $n^2 \geq 8^2 > 7$.

Nevienādība $\frac{n^2+3n+3}{7} < n^2$ ir ekvivalenta nevienādībai $n^2+3n+3<7n^2 \Leftrightarrow 2n^2-n-1>0$.

Atliek ievērot, ka funkcija $f(x)=2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$ pieņem pozitīvas vērtības intervālā $(1;+\infty)$, tātad $2n^2-n-1>0$ visiem naturāliem skaitļiem $n > 1$.

12.4. Sauksim par doto 6 trijstūru sānu malām tās malas, kas atrodas uz sešstūra malām. Aplūkosim šo trijstūru abu sānu malu garumu summas. Tā kā dotā sešstūra perimetrs ir vienāds ar 6, no Dirihlē principa seko, ka vismaz viena šāda summa nav lielāka kā 1 (jo visas trijstūru sānu malas pilnībā nosedz visas sešstūra malas). Apzīmēsim šo trijstūri ar Δ un tā sānu malas ar a un b, tad $a+b\le 1$. No nevienādības starp vidējo aritmētisko un vidējo ģeometrisko seko:

$$2\sqrt{ab}\le a+b\le 1$$

$$ab\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$ab\le\frac{1}{4} \qquad (1)$$

Trijstūra Δ laukumu varam aprēķināt pēc formulas $\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, kur α ir leņķis starp malām a un b. Tā kā dots regulārs sešstūris, tad $\alpha=120°$. Tāpēc trijstūra Δ laukums ir vienāds ar

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha=\frac{1}{2}ab\sin 120°=\frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}ab \qquad (2)$$

No (1) un (2) seko, ka trijstūra Δ laukums nav lielāks kā $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16}$, k.b.j.

12.5. Pierādīsim vispārīgāku apgalvojumu: ja parlamentā ir n deputāti un katram no viņiem ir domstarpības ar ne vairāk kā d citiem deputātiem, kur $0\le d\le n$, tad deputātus var sadalīt $d+1$ komisijā tā, lai vienas komisijas nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā. Tādā gadījumā uzdevumā prasītais sekos no pierādītā apgalvojuma, ja $n = 2013$. Pierādāmo apgalvojumu pamatosim ar matemātisko indukciju pēc n.

Indukcijas bāze. Ja $n = d + 1$, tad katrā no $d + 1$ komisijām iekļaujam tieši vienu deputātu. Acīmredzami, ka tad starp vienas komisijas locekļiem nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā.

Induktīvais pieņēmums. Pieņemsim, ka gadījumā, ja parlamentā ir n deputāti, tad viņus var sadalīt vajadzīgajā veidā.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka parlamentā ir $n + 1$ deputāts; parādīsim, ka arī tad viņus var sadalīt $d + 1$ komisijā vajadzīgajā veidā.

Izvēlamies patvaļīgu deputātu A. Atlikušos n deputātus sadala $d + 1$ komisijā tā, lai starp vienas komisijas locekļiem nekādiem diviem deputātiem nebūtu domstarpību savā starpā (ko var izdarīt, saskaņā ar induktīvo pieņēmumu). Deputātam A ir domstarpības ar ne vairāk kā d citiem deputātiem, taču izveidota $d+1$ komisija. Tas nozīmē, ka ir vismaz viena tāda komisija, ka A nav domstarpību ne ar vienu šīs komisijas deputātu. Tad A varam iekļaut šajā komisijā, līdz ar ko arī $n + 1$ deputāts ir sadalīts $d + 1$ komisijā vajadzīgajā veidā. Induktīvā pāreja ir izdarīta, tātad apgalvojums ir pierādīts.