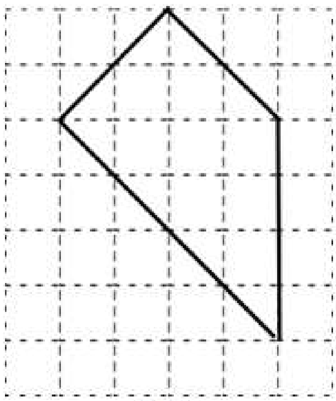
2012./2013.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

5. klase

1. Vilks kopā ar trim sivēntiņiem Nif-Nifu, Naf-Nafu un Nuf-Nufu ir sarakstījis grāmatu „*Izturīgās būves*”, bet kopā ar Sarkangalvīti un viņas vecmāmiņu – grāmatu „*Visvisādi pīrādziņi*”. Izdevniecība par katru grāmatu maksā honorāru, kas jāsadala vienādās daļās starp attiecīgās grāmatas autoriem. Pēc tam, kad Naf-Nafs bija saņēmis savu honorāra daļu, par abām grāmatām neizmaksātais honorārs bija 2520 lati. Cik liela naudas summa par abām grāmatām pienākas Vilkam?
Par katru grāmatu izmaksājamā honorāra lielums var atšķirties.

2. Tirmantiņš ir izcepis dīvainas formas torti (skat. 1. zīm.) un vēlas to sagriezt četrās pilnīgi vienādās (gan pēc formas, gan pēc laukuma) daļās. Parādi zīmējumā, kā to var izdarīt!
Gabali attiecībā viens pret otru drīkst būt gan pagriezti, gan „apgriezti otrādi”.

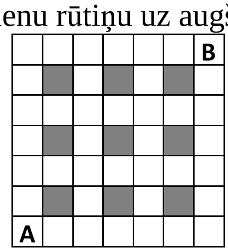


1. zīm.

3. Kādu dienu Robinsons izrēķināja, ka nākamajās 1000 dienās ceturtdienu būs vairāk nekā piektdienu. Kurā nedēļas dienā Robinsons veica šos aprēķinus?

4. Septiņciparu skaitļa A ciparu summa ir divciparu skaitlis B, kura ciparu summa, savukārt, ir viencipara skaitlis C. Šo trīs skaitļu pierakstā tiek lietoti visi cipari no 0 līdz 9, un neviens cipars neatkārtojas. Kāds ir skaitlis C?

5. Noteikt, cik dažādos veidos no rūtiņas A var nonākt rūtiņā B (skat. 2. zīm.), ja katrā solī drīkst iet vienu rūtiņu pa labi vai vienu rūtiņu uz augšu. (Iekrāsotajās rūtiņās ieiet nedrīkst.)



2. zīm.

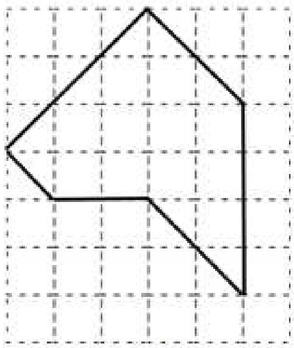
6. klase

1. Ar kādu mazāko naturālo skaitli jāreizina skaitlis 315, lai reizinājumā iegūtu skaitli, kas ir **a)** kāda naturāla skaitļa n reizinājums pašam ar sevi, t.i., $n \cdot n$, **b)** kāda naturāla skaitļa n reizinājums pašam ar sevi trīs reizes, t.i., $n \cdot n \cdot n$?

2. Vinnijs Pūks un Sivēntiņš ir sadalījuši savā starpā torti. Pēc abu daļu apskates Sivēntiņš sacēla brēku, ka viņa gabals ir acīmredzami mazāks. Vinnijs Pūks atdeva Sivēntiņam ceturto daļu no sava gabala, kā rezultātā Sivēntiņa daļa palielinājās septiņas reizes. Kāda tortes daļa sākumā bija iedalīta Vinnijam Pūkam un kāda – Sivēntiņam?

3. Taisnstūrveida zemes gabala katras malas garums izsakāms veselā skaitā metru, turklāt zināms, ka viena mala ir par 7 metriem garāka nekā otra. Šī zemes gabala trīs malu garumu summa ir 2012 metri. Kāds ir šī zemes gabala perimetrs?

4. Tirmantiņš ir izcepis dīvainas formas torti (skat. 3. zīm.) un vēlas to sagriezt piecās pilnīgi vienādās (gan pēc formas, gan pēc laukuma) daļās. Gabali attiecībā viens pret otru drīkst būt pagriezti, bet nedrīkst būt „spoguļattēlā?”. Parādi, kā to var izdarīt!



3. zīm.

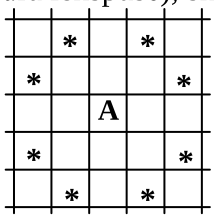
5. Mazākais naturālais skaitlis, kuru var izteikt kā piecu dažādu naturālu skaitļu summu, ir 15=1+2+3+4+5. Cik dažādos veidos kā piecu dažādu naturālu skaitļu summu var izteikt skaitli 20? (Divus veidus, kas atšķiras tikai ar saskaitāmo secību, uzskatām par vienādiem.)

7. klase

1. Daļskaitļa skaitītājs un saucējs ir naturāli skaitļi, kuru summa ir 2012. Zināms, ka daļskaitļa vērtība nepārsniedz $\frac{1}{7}$. Atrodi lielāko iespējamo šāda daļskaitļa vērtību!

2. Uzzīmē slēgtu lauztu līniju, kurai ir **a)** 6, **b)** 7 posmi un kas pati sevi krusto tieši 7 dažādos punktos.

3. Rūtiņu lapā uzzīmēts taisnstūris, kura malas iet pa rūtiņu malām. Šī taisnstūra visas rūtiņas var apstaigāt ar šaha zirdziņu, katrā rūtiņā nonākot tieši vienu reizi. Kāds ir mazākais iespējamais šāda taisnstūra laukums?
Piezīme: Šaha zirdziņš no rūtiņas A ar vienu gājienu var nonākt tikai kādā no rūtiņām, kas apzīmētas ar * (ja tās atrodas taisnstūra iekšpusē), skat. 4. zīm.



4. zīm.

4. Divos televīzijas kanālos vienlaicīgi sāka demonstrēt vienu un to pašu filmu. Pirmajā kanālā filma bija sadalīta 26 minūšu fragmentos un starp katriem diviem fragmentiem bija divas minūtes gara reklāma. Savukārt, otrajā kanālā filma bija sadalīta 13 minūšu fragmentos un starp katriem diviem fragmentiem bija vienu minūti gara reklāma. Kurā kanālā filma beigsies agrāk? Atbildi pamatot!

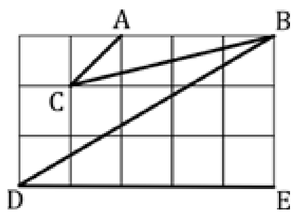
5. Vai naturāla skaitļa kvadrāts (reizinājums pašam ar sevi) var būt skaitlis **a)** $\overline{AABB}$, **b)** $\overline{ABAB}$, kur A un B ir dažādi cipari.
Pieraksts $\overline{KLM}$ nozīmē, ka skaitlī ir M vieni, L desmiti un K simti; K, L, M ir cipari.

8. klase

1. Cik starp pirmajiem 2012 naturāliem skaitļiem ir tādi, kas nedalās ne ar 5, ne ar 7?

2. Uz tāfeles uzrakstīti n (n>1) dažādi naturāli skaitļi. Lielākais no tiem ir 11. Visu uzrakstīto skaitļu vidējais aritmētiskais arī ir naturāls skaitlis. Ja skaitli 11 nodzēš, tad atlikušo skaitļu vidējais aritmētiskais arī ir naturāls skaitlis. Kādai lielākajai n vērtībai tas ir iespējams? Kādi skaitļi šajā gadījumā sākumā bija uzrakstīti uz tāfeles? Pietiek uzrādīt vienu piemēru.

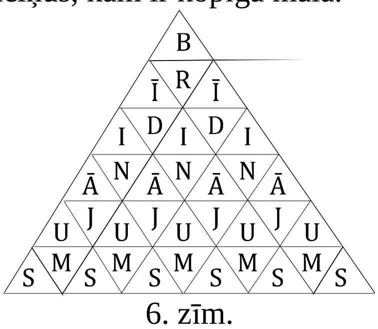
3. Kvadrātisku rūtiņu lapā atzīmētas piecas virsotnes A, B, C, D un E (skat. 5. zīm.). Salīdzini leņķus $\angle ACB$ un $\angle BDE$ (nosaki, kurš no tiem ir lielāks vai arī pamato, ka tie ir vienādi)!



5. zīm.

4. Tūrists pārgājienā pavadīja 4,5 stundas. Katrā vienu stundu garā laika sprīdī viņš nogāja tieši 4 kilometrus. Vai noteikti tūrista vidējais ātrums visā pārgājienā bija 4 *km*/*h*? Ja nē, tad kāds ir mazākais iespējamais un lielākais iespējamais tūrista vidējais ātrums visā pārgājienā? Atbildi pamatot!

5. Cik dažādos veidos 6. zīm. var izlasīt vārdu BRĪDINĀJUMS, ja jāsāk lasīt no trijstūra augšējā laucina, un visu laiku jāpārvietojas uz blakus laucinu?
Par blakus lauciņiem sauc lauciņus, kam ir kopīga mala.



6. zīm.

9. klase

1. Pieci veseli skaitļi *a*, *b*, *c*, *d* un *e* ir pēc kārtas sekojoši aritmētiskās progresijas locekļi. Zināms, ka *a* nav 0 un ka *b* un *d* ir kvadrātvienādojuma $ax^2 + cx + e = 0$ saknes. Noteikt skaitļu *a*, *b*, *c*, *d* un *e* vērtības!
Paskaidrojums. Par aritmētisko progresiju sauc skaitļu virkni, kurā katru nākamo locekli iegūst iepriekšējam pieskaitot vienu un to pašu skaitli.

2. Trijstūrī *ABC* izvēlēts malas *AB* iekšējs punkts *D* un novilkts nogrieznis *CD*. Dots, ka *AB* = *BC* un *BD* = *DC* = *CA*. Aprēķināt leņķi $\angle$ABC.

3. Ar kādu lielāko skaitļa 2013 pakāpi dalās skaitlis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots . \cdot 2012$?

4. Kvadrātveida tabulā ar izmēriem 5×5 rūtiņas katrā rūtiņā ir ierakstīts viens skaitlis. Visu tabulā ierakstīto skaitļu summa ir pozitīvs skaitlis. Pierādīt, ka tabulā var izvēlēties piecas rūtiņas tā, ka nekādas divas neatrodas ne vienā rindiņā ne vienā kolonā, un tajās ierakstīto skaitļu summa ir pozitīva.

5. Iedomāsimies, ka uz Zemes ieradušies citplanētieši, un viņiem ir pastāstīts, ka uz Zemes laiku mēra gados, dienās un mēnešos. Pie tam ir zināms, ka:
1) gada ilgums ir 365 dienas,
2) gads ir sadalīts 28, 30 vai 31 dienu garos mēnešos.
Vai, zinot **tikai šo informāciju**, citplanētieši var viennozīmīgi noteikt **a)** mēnešu skaitu gadā, **b)** katra veida mēnešu skaitu?

10. klase

1. Atrisināt veselos skaitļos vienādojumu $x^3 + y^3 - x^2 y - xy^2 + x^2 - y^2 - 10 = 0$.

2. Taisnstūra *ABCD* diagonāle *BD* ir taisnstūra *BDEF* mala. Punkts *C* atrodas uz *EF*. Pierādīt, ka $S_{ABD} = S_{CDE} + S_{BCF}$!

3. Pierādīt, ka izteiksmes $19 \cdot 8^n + 17$ vērtība nav pirmskaitlis nevienai veselai nenegatīvai n vērtībai!

4. Atrast visus naturālos skaitļus, kuros ir vairāk nekā četri cipari, kas beidzas ar 2013 un, ja šim skaitlim nodzēš pēdējos četrus ciparus, tad tas samazinās veselu skaitu reižu!

5. Tabulā ar izmēriem 4×4 rūtiņas katrā rūtiņā ir ierakstīts skaitlis 1, 2 vai 3. Ja divās rūtiņās ar kopīgu malu vai stūri ir ierakstīts viens un tas pats skaitlis, tad teiksim, ka veidojas *pāris*. Noskaidrot, kāds var būt minimālais *pāru* skaits šajā tabulā.

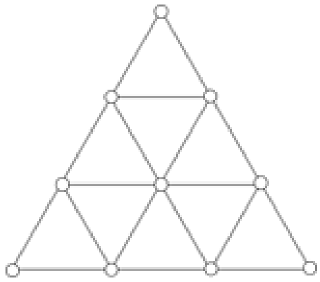
11. klase

1. Pierādīt, ka nav tādas ģeometriskās progresijas, kas satur visus trīs skaitļus 1, $\sqrt{2}$ un $\sqrt[3]{3}$.

2. Četrstūris *ABCD* ievilkts riņķa līnijā. Tā diagonāles *AC* un *BD* vienlaikus ir attiecīgi leņķu *BAD* un *CDA* bisektrises. Vai *ABCD* noteikti ir kvadrāts?

3. Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz tādu naturālu skaitļu k, ka $11k–2$ ir skaitļa 3 pakāpe.

4. Regulārā trijstūra režģa (skat. 7. zīm.) katra no desmit virsotnēm nokrāsota sarkanā vai zaļā krāsā. Pierādīt, ka ir iespējams atrast regulāru trijstūri, kura visas virsotnes ir nokrāsotas vienā krāsā! Trīsstūra malas var nebūt paralēlas režģa malām.



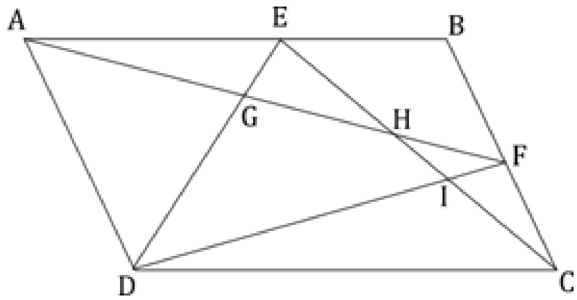
7. zīm.

5. Pierādīt, ka bezgalīgā rūtiņu lapā var novilkt riņķa līniju, kuras iekšpusē atrodas tieši 2012 rūtiņu virsotnes.

12. klase

1. Kāda ir izteiksmes $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}$ mazākā iespējamā vērtība, ja a un b ir naturāli skaitļi?

2. Uz paralelograma $ABCD$ malas AB izvēlēts punkts E, bet uz malas BC – punkts F (skat. 8. zīm.). Nogriežņu DE un AF krustpunkts ir G, bet EC krustpunkti ar AF un DF ir attiecīgi punkti H un I. Pierādīt, ka $S_{DGHI} = S_{AGE} + S_{EBFH} + S_{CFI}$.



8. zīm.

3. Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais loceklis ir vienāds ar trīs iepriekšējo skaitļu summu. Vai ar 5 dalās šīs virknes **a)** 111.; **b)** 2012. loceklis?

4. Lauka forma ir taisnstūris ar malu garumiem 4 *km* un 6 *km*. Tajā ir uzceltas 5 mājas. Pierādīt, ka, neatkarīgi no māju izvietojuma, varēs uzbūvēt ceļus, pa kuriem no jebkuras mājas var nokļūt uz jebkuru citu un ceļu kopējais garums nepārsniedz 15 *km*.

5. Naturālu skaitli sauksim par *jokainu*, ja tā pieraksts sastāv tikai no cipariem 1, 3, 5, 7 un 9, pie tam jebkuru divu blakus ciparu starpība ir tieši 2. Piemēram, skaitļi 5797, 31353575 un 9 ir *jokaini*. Aprēķināt, cik ir *jokainu* **a)** 11-ciparu, **b)** 2012-ciparu skaitļu!