5.1. Izdalām skaitli 2013 ar 3 un ar 4 ar atlikumu

$$2013:3=671,$$
$$2013:4=503, \text{ atl.}1.$$

Tātad trijstūrus var izveidot par $671-503=168$ vairāk.

5.2. Kolonnās ierakstīto skaitļu summas saskaitot, iegūsim visu tabulā ierakstīto skaitļu summu. To pašu var teikt arī par rindiņās ierakstīto skaitļu summām. Tāpēc trešajā rindiņā ierakstīto skaitļu summa ir $(32+34+35)-(42+27)=32$.

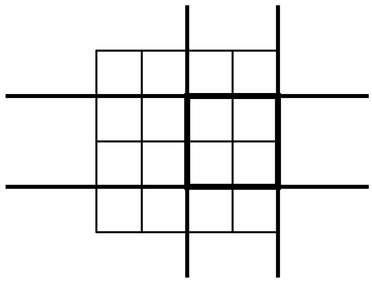
5.3. Atbilde: jā, var.
Risinājums. Vispirms Tīģerītis aiziet pie Pūces, tad abi kopā viņi iegriežas pie Vinnija Pūka, tad visi trīs iet pie Sivēntiņa un visbeidzot dodas ciemos pie Rū.

5.4. a) Tā kā *interesants* skaitlis nesatur ciparu 0 un par pēdējiem trim cipariem četrciparu skaitlī citu noteikumu nav, tad mazākie pēdējie trīs cipari ir 111. Pirmais cipars ir pārējo ciparu summa, tāpēc tas ir vismaz 3. Tātad atbilde ir 3111.
b) Skaitlis ir lielāks, ja tajā ir vairāk ciparu. Vislielākais cipars ir 9, to var iegūt, saskaitot ne vairāk kā 9 ciparus, no kuriem neviens nav 0. Tāpēc *interesantā* skaitlī ir ne vairāk kā 10 ciparu. (Pirmais cipars un vēl ne vairāk kā 9 citi). Desmit ciparu ir tikai 9111111111. Tā arī ir atbilde.

5.5. Tā kā vienādība $a+a=a$ nav iespējama, jo $a\neq 0$, tad $*$ apzīmē reizināšanu un $a=1$. No otrās vienādības secinām, ka $c=b+1$. Trešā vienādība norāda, ka $b\cdot(b+1)=d$. Tā kā *d* cipars, tad $b=2$, $c=3$, $d=6$.
Atliek aprēķināt dotās izteiksmes vērtību. Tā ir 20.

6.1. Lai skaitlis dalītos ar 9, arī tā ciparu summai jādalās ar 9. Mazākā iespējamā ciparu summa ir 9. Tā kā skaitlim jābūt vismazākajam, tad tam jāsākas ar 1. Atlikušo ciparu summai jābūt 8. Skaidrs, ka pēc iespējas vairāk pozīcijās (pēc cipara 1) ir jābūt ciparam 0 un tiem cipariem, kas ir atšķirīgi no 0, jābūt beigās. Tā kā $3+3<8$, tad trīs no atlikušajiem cipariem atšķirsies no 0. Vienīgā iespēja, kā to panākt ir $8=2+3+3$. Skaidrs, ka mazāks skaitlis būs tad, ja tūkstošu pozīcijā būs mazākais pieļaujamais cipars. Tāpēc meklētais skaitlis ir 100233.

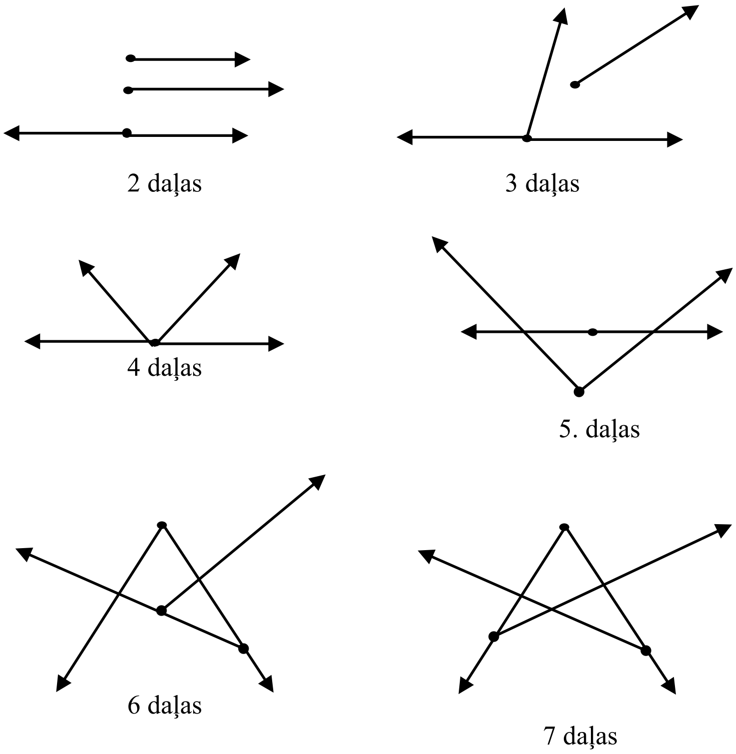
6.2. Katru taisnstūri viennozīmīgi nosaka divas vertikālās taisnes (taisnstūra malas) un divas horizontālās taisnes (taisnstūra malas), (skat. 1. zīm.).



1. zīm.

Divas vertikālās taisnes var izvēlēties 10 veidos: {(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)}. Arī divas horizontālās taisnes var izvēlēties 10 veidos. Tātad pavisam iespējams izveidot $10\times 10=100$ taisnstūru, kuru visas malas iet pa rūtiņu līnijām.
Piezīme. Uzdevumā prasīto var aprēķināt, apskatot visus iespējamo izmēru taisnstūrus: 1×1, 1×2, 1×3, …, 4×4, un saskaitot, cik ir katra veida taisnstūru.

6.3. Skat. 2. zīm.



2. zīm.

6.4. Pats labējais rūķītis noteikti ir melis (jo pa labi no viņa nestāv neviens rūķītis); tātad visi pārējie rūķīši runā patiesību. Starp rūķīšiem ir tieši viens melis.

6.5. Vai nu Aija, vai Maija apēda vismaz 13 konfektes, tāpēc Paija – vismaz 14. Tātad Aija, Maija, Paija kopā apēda vismaz $25+14=39$ konfektes, tātad Kaija – ne vairāk kā 1. Tāda situācija ir iespējama: Paija apēda – 14 konfektes, Aija – 13, Maija – 12, Kaija – 1.

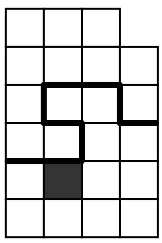
7.1. Ja $a=0$, tad *b* var pieņemt 11 vērtības $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$.

Ja $a=\pm 1$, tad *b* var pieņemt 9 vērtības.

Ja $a=\pm 2$, tad *b* var pieņemt 7 vērtības, utt.

Tātad dažādo iespēju skaits ir $11+2\cdot 9+2\cdot 7+2\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=61$.

7.2. Skat. 3. zīm.



3. zīm.

7.3. Nē, šādus skaitļus atrast nevar.

Tā kā vismaz divi no skaitļiem *a, b, c* ir ar vienādu paritāti, tad vismaz viens no reizinātājiem $a+b$, $b+c$ vai $c+a$ ir pāra skaitlis. Tātad arī reizinājums ir pāra skaitlis. Iegūta pretruna, jo 20142013 ir nepāra skaitlis.

7.4. Novietojam uz katra svaru kausa pa divām monētām. Ja kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir starp šīm četrām. Ja ir līdzsvarā, tad starp atlikušajām četrām. Atrastas četras monētas, starp kurām ir atšķirīgā.

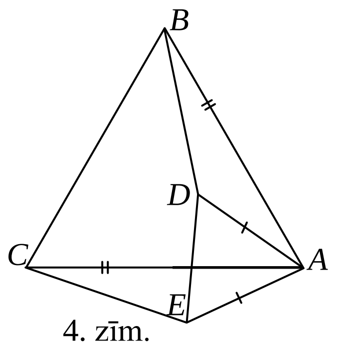
Novietojam uz kausiem pa vienai no tām. Ja kausi nav līdzsvarā, tad atšķirīgā monēta ir starp šīm divām. Ja ir līdzsvarā, tad starp atlikušajām divām. Atrastas divas monētas, starp kurām ir atšķirīgā.
Vienu no tām salīdzinām ar kādu no atrastajām īstajām un noskaidrojam, kura no atlikušajām divām ir atšķirīgā.

7.5. Aplūkosim divus zinātniekus *A* un *B*. Pierādīsim, ka viņi ir radinieki. Pieņemsim pretējo, ka *A* un *B* nav radinieki. Tad atlikuši ir 15 zinātnieki, starp kuriem ir 8 *A* radinieki un 8 *B* radinieki; tā kā kopā sanāk 16 cilvēki, tad starp tiem ir kopīgs zinātnieks *C* – viņš ir gan *A* radinieks, gan *B* radinieks. Bet tādā gadījumā arī *A* un *B* ir radinieki. Iegūta pretruna; tātad jebkuri divi zinātnieki konferencē ir radinieki.

8.1. Jā, var. Piemēram, šādi:

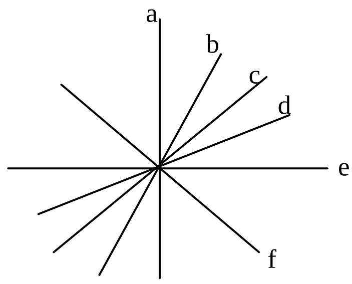
1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 10, 7, 9, 11, 13, 15, 12, 14, 16, 18, 20, 17, 19, 21, 23, 25, 22, 24.

8.2. Tā kā trijstūrī pret vienādiem leņķiem atrodas vienādas malas, tad $AE = AD$ un $AC = AB$ (skat. 4. zīm.). Bez tam $\angle EAC = 60° - \angle CAD = \angle DAB$. Tāpēc $\Delta EAC = \Delta DAB$ pēc pazīmes „*mlm*”, un no tā seko, ka $EC = DB$.



4. zīm.

8.3. Apzīmēsim visas taisnes (skat. 5. zīm.).



5. zīm.

Koordinātu asu pāris var būt tikai (a, e) vai (c, f) (jo tie ir vienīgie savstarpēji perpendikulārie taišņu pāri). Otrais gadījums nav iespējams, jo triju funkciju grafikiem jāiet caur pirmo un trešo kvadrantu.
Tātad koordinātu asis ir *a* un *e*. Skaidrs, ka *c* ir funkcijas $y = x$ grafiks un f ir funkcijas $y = -x$ grafiks.
Kura no taisnēm *b* un *d* ir kuras atlikušās funkcijas grafiks, noskaidrot nevar, jo nav zināms, kura no taisnēm *a* vai *e* ir abscisu ass (jo kodoskopa plēve ir caurspīdīga un to var apskatīt no abām pusēm).

8.4. Ievērosim, ka

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} =$$
$$= (100a + 10b + c) + (100b + 10b + a) + (100c + a + b) =$$
$$= 111 \cdot (a + b + c) = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c).$$

Tātad $\overline{bca} + \overline{cab} = 3 \cdot 37 \cdot (a + b + c) - \overline{abc}$ dalās ar 37.

8.5. Pieņemam pretējo tam, kas jāpierāda. Tad no katra skaitļu pāra (1; 12), (2; 11), (3; 10), (4; 9), (5; 8), (6; 7) augstākais viens var būt sērkociņu skaits kādā kaudzītē. Tāpēc sērkociņu nav vairāk kā 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57 – pretruna.

9.1. Visiem skaitļiem *n* izpildās vienādība

$$\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

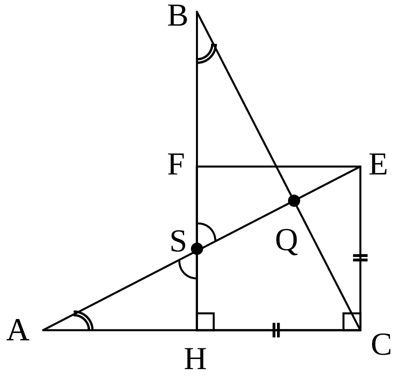
Tāpēc

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 10}=$$

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

Pārējās daļas saīsinās.

9.2. Pierādīsim, ka $AE\perp BC$ (skat. 6. zīm).



6. zīm.

No $CE=HC$ un $AC=BH$ seko, ka $\Delta ACE=\Delta BHC$ (pēc taisnleņķu trijstūru vienādības pazīmes „*kk*”). Tāpēc $\angle QBS=\angle HAS$ kā atbilstošie leņķi vienādos trijstūrus. $\angle BSQ=\angle ASH$ kā krustleņķi. Tāpēc $\angle BQS=\angle AHS=90°$. Tātad $AE\perp BC$ jeb AQ ir trijstūra ABC augstums. Līdzīgi pierāda, ka $CM\perp AB$ un CM ir trijstūra ABC augstums. Vajadzīgais seko no fakta, ka trijstūra augstumi krustojas vienā punktā.

9.3. Pieņemsim pretējo, ka $a\cdot b$ dalās ar 210.

Ievērosim, ka $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Ar p apzīmēsim jebkuru no pirmskaitļiem 2, 3, 5, 7. Tad $a\cdot b$ dalās ar p. Tātad vismaz viens no skaitļiem *a*, *b* dalās ar p. Tā kā $a+b=210$ dalās ar p, tad arī otrs skaitlis dalās ar p.

Tātad gan *a*, gan *b* dalās ar $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=210$, bet tādā gadījumā $a\geq 210$, $b\geq 210$ un $a+b>210$. Iegūta pretruna.

9.4. Pieņemsim pretējo. Viens no skaitļiem *x* un *y* ir pāra, otrs – nepāra; pieņemsim, ka *x* – pāra, *y* – nepāra.

Ja punktā 0 dzīvo votivapa, punktā $1\cdot x$ dzīvo šillišalla, punktā $2\cdot x$ – votivapa, punktā $3\cdot x$ – šillišalla, ..., punktā $y\cdot x$ – šillišalla. No otras puses, punktā $1\cdot y$ dzīvo šillišalla, punktā $2\cdot y$ – votivapa, ..., punktā $x\cdot y$ – votivapa. Iegūta pretruna. Līdzīgi iegūst pretrunu, ja punktā 0 dzīvo šillišalla.

9.5. a) Tas ir iespējams. Sākumā kaudzīšu ar nepāra skaitu konfekšu ir pāra skaits. Apvienojam tās pa pāriem un no lielākās kaudzītes pārliekam mazākajā kaudzītē atbilstošo konfekšu skaitu. Tagad visās kaudzītēs ir pāra skaits konfekšu. Uzskatīsim, ka mums tagad ir 32 dubultkonfektes, kuras turpmāk neatdalīsim. Tagad mums ir pāra skaits kaudzīšu, kurās ir nepāra skaits dubultkonfekšu. Atkārtojot iepriekšējo operāciju, iegūstam kaudzītes, kurās kopā ir 16 kvadrokonfektes. Atkārtojot iepriekšējo operāciju, iegūstam kaudzītes, kurās kopā ir 8 oktāvkonfektes (8 apvienotas konfektes). Līdzīgi iegūstam 4 16-konfektes, 2 32-konfektes un vienu kaudzi ar 64 konfektēm.

b) Nē, ne vienmēr. Pieņemsim, ka sākumā mums ir 5 kaudzītes pa 20 konfektēm katrā. Lai visas konfektes pēdējā gājienā apvienotu vienā kaudzē, iepriekšējā gājienā jāiegūst divas kaudzes ar 50 konfektēm katrā. Taču visās kaudzēs konfekšu skaits visu laiku dalīsies ar 20, bet 50 ar 20 nedalās.

10.1. Atdalām pilnos kvadrātus:

$$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=0,$$

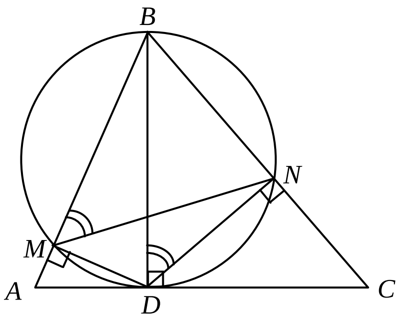
$$(x+2)^2+(y-3)^2=0.$$

Divu kvadrātu summa ir 0 tad un tikai tad, ja abu saskaitāmo vērtības ir 0.

Tātad $x+2=0$ un $y-3=0$ jeb $x=-2$ un $y=3$.

10.2. Tā kā $\angle BMD+\angle BND=90^o+90^o=180^o$, tad ap $BNDM$ var apvilkt riņķa līniju (skat. 7. zīm.). Tāpēc $\angle BMN=\angle BDN$ (ievilkti leņķi, kas balstās uz vienu un to pašu loku). Bet $\angle NCD=90°-\angle NDC=\angle BDN$, tātad $\angle NCD=\angle BMN$.

Tāpēc $\angle AMN+\angle ACN=\angle AMN+\angle BMN=180°$ jeb punkti *A, M, N, C* atrodas uz vienas riņķa līnijas, kas arī bija jāpierāda.



7. zīm.

10.3. Septiņciparu naturāls skaitlis dalās ar 8 tad un tikai tad, ja tā pēdējo 3 ciparu veidotais skaitlis dalās ar 8 (jo $\overline{...abc}=...000+\overline{abc}=...\cdot 10^3+\overline{abc}$).

Ja pirmie 4 cipari ir 9 un $\overline{abc}=888$, ciparu summa ir $4\cdot 9+3\cdot 8=60$. Pierādīsim, ka $\overline{abc}$ ciparu summa nevar būt lielāka kā 24. Lai tā būtu lielāka nekā 24, pastāv šādas iespējas:

1) viens no cipariem *a, b, c* ir 9, bet divi – 8,
2) divi no cipariem *a, b, c* ir 9, bet viens – 8,
3) visi cipari *a, b, c* ir 9,
4) divi no cipariem *a, b, c* ir 9, bet viens – 7.

Viegli pārbaudīt, ka neviens no šādiem skaitļiem nedalās ar 8.

Tātad lielākā iespējamā septiņciparu skaitļa, kas dalās ar 8, ciparu summa ir 60.

10.4. Apzīmēsim cilvēkus ar *A, B, C, D*. Lai izpildītos uzdevuma nosacījumi, var izveidot 8 komisijas:

$$A, AB, AC, AD, ABC, ABD, ACD, ABCD.$$

Vairāk komisijas izveidot nevar: 4 elementu kopai ir $2^4=16$ apakškopas, un, ja kādu apakškopu izvēlas par komisiju, tad tās papildinājumu par komisiju ņemt vairs nevar.

10.5. Uzvar Gunārs.

Tā kā pēdējais (uzvarošais) gājiens tiek izdarīts vai nu no pozīcijas 500, vai no pozīcijas 999, tad zaudē tas, kurš uzraksta vienu no šiem skaitļiem. Pieņemsim, ka zaudētājs uzraksta 500. Tas tiek darīts tāpēc, ka citu iespēju (izņemot varbūt rakstīt 999) viņam nav. Tas nozīmē, ka visi skaitļi 1; 2; 3; ...; 499 jau ir uzrakstīti (citādi varētu rakstīt mazāko vēl neuzrakstīto no tiem) un tātad arī divas reizes lielākie skaitļi 502; 504; ... 998 ir uzrakstīti; no tā savukārt seko, ka arī 503; 505; ...; 997 ir jau uzrakstīti. Savukārt 999 vēl nav uzrakstīts (citādi spēle būtu beigusies jau ātrāk) un arī

501 vēl nav uzrakstīts (citādi jau iepriekš būtu uzrakstīts 500, un spēle būtu beigusies ātrāk). Tātad brīdī, kad zaudētājs uzrakstījis 500, uz tāfeles atrodas 997 skaitļi (ieskaitot 500). Tāpēc skaitli 500 uzraksta sācējs, proti, Dzintars. Tāpēc viņš zaudē.
Gadījumu, ja „zaudējošais gājiens" ir 999 uzrakstīšana, analizē līdzīgi.

11.1. Atdalām pilnos kvadrātus:

$$(x^2+2xy+y^2)+(4y^2+4y+1)=0,$$

$$(x+y)^2+(2y+1)^2=0.$$

Divu kvadrātu summa ir 0 tad un tikai tad, ja abu saskaitāmo vērtības ir 0.

Tātad $x+y=0$ un $2y+1=0$ jeb $y=-\frac{1}{2}$ un $x=\frac{1}{2}$.

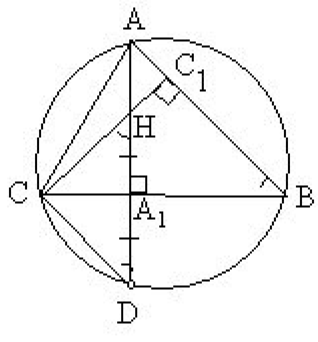
11.2. a) jā, skat., piemēram, 8. zīm.

8	3	9
1	5	6
7	2	4

8. zīm.

b) nē. Apskatīsim pirmskaitļus 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79. Tā kā tie visi lielāki nekā $\frac{1}{2}\cdot 81$, tad neviens cits ierakstāmais skaitlis ne ar vienu no tiem nedalās. Tāpēc šiem skaitļiem jābūt uz diagonāles (ja kāds pirmskaitlis sastopams rindiņas elementu reizinājumā, tad tam jābūt sastopamam arī atbilstošās kolonnas elementu reizinājumā). Bet šo pirmskaitļu pavisam ir 10, un tie jāizvieto 9 vietās – pretruna.

11.3. Tā kā punkti H un D ir simetriski attiecībā pret taisni BC (skat. 9. zīm.), tad $\angle CDA=\angle CHA_1$, bet $\angle CHA_1=\angle CBA$ kā leņķi ar savstarpēji perpendikulārām malām. Tātad $\angle CDA=\angle CBA$ un tāpēc punkts D atrodas uz riņķa līnijas. Līdzīgi pierāda, ka arī pārējie punkti atrodas uz trijstūrim ABC apvilktās riņķa līnijas.

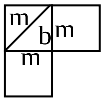


9. zīm.

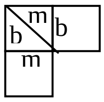
11.4. Ievērosim, ka rūtiņas uz kvadrāta vienas diagonāles var nokrāsot patvaļīgi. Pamatosim, ka šādā gadījumā tiek pilnībā noteikts citu rūtiņu krāsojums. Apskatīsim, kā jākrāso rūtiņas pēc tam, kad diagonāles rūtiņas jau ir nokrāsotas. Gadījumā, kad vēl nenokrāsotai rūtiņai ir divas kopīgas blakus malas ar jau nokrāsotām rūtiņām, ir noteikts, kādam jābūt nenokrāsotās rūtiņas krāsojumam. Jāapskata divi atšķirīgi gadījumi:

- Abas blakusesošās rūtiņas ir jau nokrāsotas un tas izdarīts tā, ka abas malas, kas kopīgas vēl nenokrāsotai rūtiņai ar jau nokrāsotajām, ir vienā krāsā (abas melnas vai abas baltas). Jāvelk tā diagonāle, kas kvadrātiņu sadala tā, lai abas nokrāsoto rūtiņu malas būtu vienā trijstūrī, piemēru skat. 10. zīm.
- Abas blakusesošās rūtiņas ir jau nokrāsotas un tas izdarīts tā, ka malas, kas kopīgas vēl nenokrāsotai rūtiņai ar jau nokrāsotajām, ir dažādās krāsās (viena melna, otra balta).

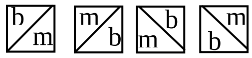
Jāvelk tā diagonāle, kas kvadrātiņu sadala tā, lai abas nokrāsoto rūtiņu malas būtu dažādos trijstūros, piemēru skat. 11. zīm.



10. zīm.



11. zīm.



12. zīm.

Tātad esam pamatojuši, ka nokrāsota diagonāle viennozīmīgi nosaka pārējo rūtiņu krāsojumu. Apskatīsim, cik veidos iespējams nokrāsot diagonāli. Skaidrs, ka katru diagonāles rūtiņu iespējams nokrāsot 4 dažādos veidos: skat. 12. zīm. Bet, tā kā vienas diagonāles rūtiņas nokrāsošana neietekmē pārējo diagonāles rūtiņu krāsošanu, tad kopā iespējami $4^4 = 256$ dažādi diagonāles krāsojumi. Tātad arī kopējais kvadrāta krāsojumu skaits ir 256.

11.5. a) piemēram, $n = 40$.

b) nē, nevar. Tiešām, apzīmēsim $2n+1 = x^2$, $3n+1 = y^2$. Tad $x > 1$, $y > 1$ un $5n+3 = 4(2n+1)-(3n+1) = 4x^2 - y^2 = (2x-y)(2x+y)$. Tā kā x un y ir naturāli skaitļi un $5n+3$ - pirmskaitlis, tad jābūt $2x-y=1$ un $2x+y=5n+3$. No šejienes $2y = 5n+2$. Tāpēc $4y^2 = 25n^2+20n+4 > 12n+4 = 4(3n+1) = 4y^2$ - pretruna.

12.1. Visiem skaitļiem n izpildās vienādība

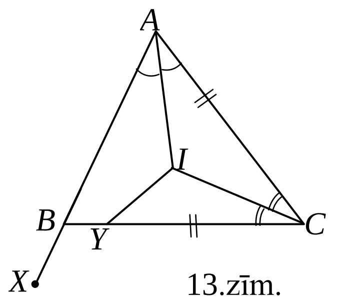
$$\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Tāpēc

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{2013\cdot 2014} =$$
$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2013}-\frac{1}{2014}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2014} = \frac{2013}{2014}.$$

Pārējās daļas saīsinās.

12.2. Apzīmējam ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru ar I (skat. 13. zīm.). Tad $\angle AIC = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = 180° - \frac{1}{2}(180° - 60°) = 120°$. Tā kā $\Delta ACI = \Delta YCI$ (pēc pazīmes „*mlm*”), tad arī $\angle CIY = 120°$. Līdzīgi pierāda, ka $\angle AIX = 120°$. Bet no tā seko, ka stari *IY* un *IX* sakrīt. No tā seko, ka *X*, *Y* un *I* atrodas uz vienas taisnes jeb *I* atrodas uz taisnes *XY*, kas arī bija jāpierāda.



13.zīm.

12.3. Pieņemsim, ka 6^n-1 dalās ar 4^n-1. Tad arī $(6^n-1)-(4^n-1)=6^n-4^n=2^n(3^n-2^n)$ dalās ar 4^n-1. Tad 3^n-2^n jādalās ar 4^n-1 (jo reizinātājs 2^n neiespaido dalīšanos ar nepāra skaitli 4^n-1). Bet $3^n-2^n<3^n-1<4^n-1$ un tāpēc 3^n-2^n nevar dalīties ar 4^n-1. Iegūta pretruna.

Piezīme. Uzdevumu var atrisināt arī pamatojot, ka $4^n-1=(2^n-1)(2^n+1)$ dalās ar 3, bet $6^n-1=3^n\cdot 2^n-1$ ar 3 nedalās, līdz ar to 6^n-1 nedalās ar 4^n-1.

12.4. a) nevar. Pie $x=2$ abu sākotnējo polinomu vērtības dalās ar 3, tāpēc ar 3 jādalās arī visu iegūstamo polinomu vērtībām. Bet polinoms *x* nedalās ar 3, ja $x=2$.

b) var. Ja $x^2+x=f$ un $x^2-2=g$, tad $x=(f-g)(f-g)+2g-3f$, jo

$$\begin{aligned}&(f-g)(f-g)+2g-3f=\\&=((x^2+x)-(x^2-2))((x^2+x)-(x^2-2))+2(x^2-2)-3(x^2+x)=\\&=(x^2+x-x^2+2)(x^2+x-x^2+2)+2x^2-4-3x^2-3x=\\&=(x+2)(x+2)-4-x^2-3x=x^2+4x+4-4-x^2-3x=x.\end{aligned}$$

12.5. Apzīmēsim atbilstošu pārkārtojumu skaitu n skolēnu gadījumā ar a_n. Acīmredzami, $a_1=1$ un $a_2=2$.

Apskatīsim $n+2$ skolēnus un meklēsim formulu, kas izsaka a_{n+2} ar a_n un a_{n+1}. Visi pārvietojumi iedalās divās daļās:

a) pirmais skolēns paliek uz vietas. Tad pārkārtojas tikai atlikušie $n+1$ skolēni. Šādu pārkārtojumu pēc definīcijas ir a_{n+1}.

b) pirmais skolēns pāriet uz otro krēslu. Tad uz pirmo krēslu pāriet skolēns no otrā krēsla. Pārējie *n* skolēni pārkārtojas "savā starpā". Tādu pārkārtojumu pēc definīcijas ir a_n.

Tātad $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. Iegūstam $a_3=1+2=3$, $a_4=5$, $a_5=8$, $a_6=13$, $a_7=21$, $a_8=34$, $a_9=55$, $a_{10}=89$, $a_{11}=144$, $a_{12}=233$.