2013./2014.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

5. klase

1. Ziemassvētku vecītim ir 2013 šokolādes tāfelītes. Tās jāsaliek kastītēs vai nu pa 3, vai pa 4 katrā kastītē. Kurā gadījumā būs nepieciešams vairāk kastīšu – ja visās kastītēs liek tieši 3 šokolādes tāfelītes vai visās liek tieši 4 šokolādes tāfelītes? Par cik vairāk?

2. Tabula sastāv no 3×3 rūtiņām. Katrā rūtiņā ierakstīts kāds skaitlis. Kolonnās ierakstīto skaitļu summas ir 32, 34, 35. Divās rindās ierakstīto skaitļu summas ir 42 un 27. Kāda ir trešajā rindā ierakstīto skaitļu summa?

3. Sivēntiņš var iet ciemos tikai tad, ja Vinnijs Pūks viņu pavada. Vinnijs Pūks var iet ciemos tikai tad, ja viņu pavada Pūce vai Tīģerītis, bet Pūce – ja viņu pavada Tīģerītis. Vai visi minētie dzīvnieki varēs aiziet ciemos pie Rū, ja zināms, ka Tīģerītim pavadonis nav nepieciešams? Sākumā katrs dzīvnieks atrodas savā mājiņā, kurā dzīvo viņš viens pats.

4. Sauksim naturālu skaitli par *interesantu*, ja tas nesatur ciparu 0 un tā pirmais cipars vienāds ar visu citu ciparu summu.

a) Kāds ir mazākais *interesantais* četrciparu skaitlis?

b) Kāds ir lielākais *interesantais* skaitlis?

5. Tālajā pasaku zemē saskaitīšanu un reizināšanu apzīmē ar $*$ un $\circ$ (nav zināms, kuru darbību ar kuru simbolu). Ar *a, b, c, d* ir apzīmēti dažādi cipari, kas nav nulle. Karalis apgalvo, ka šādas vienādības

$$a * a = a$$

$$b \circ a = c$$

$$b * c = d$$

ir patiesas.

Kādas var būt izteiksmes $(a * b) \circ (c * d)$ vērtības?

6. klase

1. Kāds ir mazākais sešciparu skaitlis, kas sastāv tikai no cipariem 2, 0, 1, 3 un dalās ar 9? Cipari drīkst atkārtoties un visi cipari nav jāizmanto.

2. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām rūtiņām. Cik ir taisnstūru, kuru visas malas iet pa rūtiņu malām?

3. Parādīt, ka 4 stari var sadalīt plakni 2; 3; 4; 5; 6; 7 daļās.

4. Rindā stāv 2013 rūķīši. Katrs no viņiem vai nu vienmēr runā taisnību, vai vienmēr melo. Katrs rūķītis apgalvo: "no manis pa labi stāv vismaz viens melis". Cik starp rūķīšiem ir meļu?

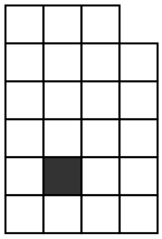
5. Aija, Maija, Paija un Kaija kopā apēda 40 konfektes (katra – vismaz vienu). Aija un Maija kopā apēda 25 konfektes, Paija apēda vairāk konfekšu nekā jebkura cita meitene. Cik konfekšu apēda Kaija?

7. klase

1. Cik dažādos veidos var izvēlēties veselus skaitļus a un b tā, ka

$$|a|+|b|<6 \ ?$$

2. Sagriez 1. zīm. attēloto figūru divās vienādās daļās (iekrāsotā rūtiņa ir caurums). Par vienādām uzskatāmas arī tādas figūras, kuras var iegūt vienu no otras „apgāžot otrādi”.



1. zīm.

3. Vai var atrast tādus trīs naturālus skaitļus a, b un c, ka $(a+b)(b+c)(c+a)=20142013$?

4. Dotas 8 pēc ārējā izskata vienādas monētas. No tām 7 ir ar vienādu masu, bet vienas monētas masa ir citāda. Doti arī sviras svari bez atsvariem. Kā ar 3 svēršanu palīdzību atrast atšķirīgo monētu?

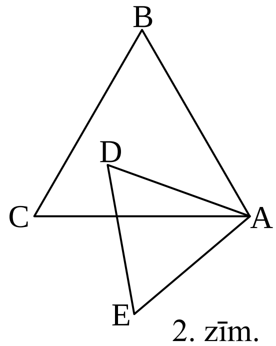
5. Konferencē piedalījās 17 zinātnieki. Katrs no viņiem konstatēja, ka konferencē vismaz 8 zinātnieki ir viņa radinieki. Pierādīt, ka visi 17 zinātnieki ir radinieki.

2013./2014.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

8. klase

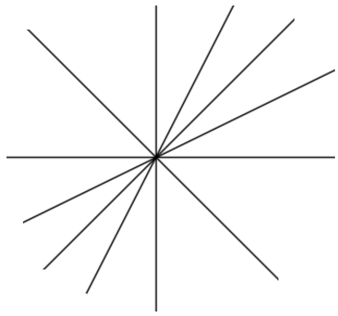
1. Vai naturālos skaitļus no 1 līdz 25 ieskaitot var izrakstīt rindā katru vienu reizi, tā, lai katri divi blakus uzrakstīti skaitļi atšķirtos viens no otra vai nu par 2, vai par 3?

2. Katram no trijstūriem ABC un ADE visi leņķi ir $60°$ lieli (skat. 2. zīm.). Pierādīt, ka $BD = CE$.



2. zīm.

3. Haotiskais profesors no somas izvelk caurspīdīgu kodoskopa plēvi, uz kuras ir tāds attēls kā parādīts 3. zīm. Viņš zina, ka no attēlotajām taisnēm divas ir koordinātu asis, bet pārējās – funkciju $y = 2x,\ y = x,\ y = -x,\ y = \frac{1}{2}x$ grafiki. Profesors ir aizmirsis, kuras ir asis, kā arī kura ir plēves augšpuse.
Par kurām funkcijām var noteikti pateikt, kurš no dotajiem ir tās grafiks?



3. zīm.

4. Ar $\overline{xyz}$ apzīmēsim trīsciparu skaitli ar cipariem x (simti), y (desmiti) un z (vieni). Pierādīt: ja $\overline{abc}$ dalās ar 37, tad arī $\overline{bca} + \overline{cab}$ dalās ar 37.

5. Vairākās kaudzītēs kopā ir 58 sērkociņi; nevienā kaudzītē nav mazāk kā 1 sērkociņš un nav vairāk kā 12 sērkociņi.
Pierādīt: vai nu ir divas kaudzītes, kurās ir vienāds sērkociņu skaits, vai arī ir divas kaudzītes, kurās kopā ir tieši 13 sērkociņi.

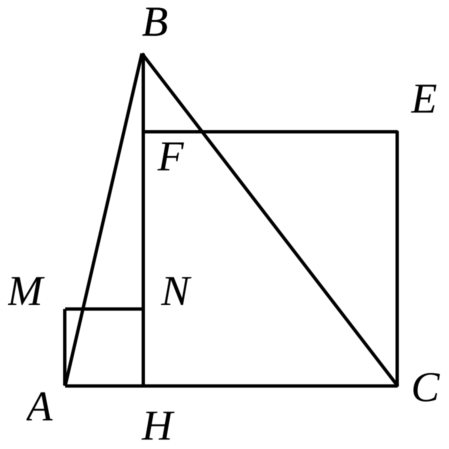
2013./2014.m.g. sagatavošanās olimpiāde matemātikā

9. klase

1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 10}=\frac{9}{10}\ .$$

2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BH*. Ir zināms, ka $AC = BH$ un četrstūri *AMNH* un *HCEF* ir kvadrāti (skat. 4. zīm.) Pierādīt, ka taisnes *AE*, *CM* un *BH* krustojas vienā punktā.



4. zīm.

3. Dots, ka *a* un *b* ir naturāli skaitļi un $a+b=210$. Pierādīt, ka ab nedalās ar 210.

4. Dots, ka *x* un *y* – naturāli skaitļi un $x+y$ ir nepāra skaitlis. Zināms, ka katrā skaitļu ass punktā ar veselu koordināti dzīvo pa rūķītim: dažos punktos – votivapas, pārējos – šillišallas. Pierādīt, ka eksistē tādi divi vienas cilts rūķīši, starp kuriem attālums ir vai nu *x*, vai *y*.

5. Vairākās kaudzēs kopā ir *n* konfektes. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuras 2 kaudzes un no lielākās pārlikt mazākajā tik konfekšu, cik mazākajā jau ir (vai apvienot abas kaudzes vienā kaudzē, ja tajās ir vienāds konfekšu daudzums).
Vai taisnība, ka visas konfektes var apvienot vienā kaudzē neatkarīgi no to sākotnējā sadalījuma, ja

a) $n=64$,

b) $n=100$?

10. klase

1. Atrisināt vienādojumu $x^2+y^2+4x-6y+13=0$.

2. Šaurleņķu trijstūrī *ABC* novilkts augstums *BD*. No punkta *D* novilkti perpendikuli pret malām *AB* un *CB*; to pamati ir attiecīgi *M* un *N*. Pierādīt, ka punkti *A*, *M*, *N*, *C* atrodas uz vienas riņķa līnijas.

3. Kāda ir lielākā iespējamā ciparu summa septiņciparu naturālam skaitlim, kas dalās ar 8?

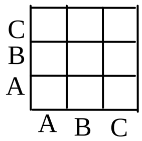
4. Kādu lielāko skaitu dažādu komisiju var izveidot no 4 cilvēkiem tā, lai katrām divām komisijām būtu vismaz viens kopīgs loceklis?
Nekādas divas komisijas nesastāv no vieniem un tiem pašiem cilvēkiem. Komisija var sastāvēt arī no viena dalībnieka.

5. Gunārs un Dzintars pamīšus raksta uz tāfeles pa vienam naturālam skaitlim, kas nepārsniedz 1000. Sāk Dzintars, uzrakstot skaitli 1. Neviens jau uzrakstīts skaitlis netiek nodzēsts; nevienu skaitli nedrīkst rakstīt otrreiz.
Ja kaut kāds skaitlis x jau ir uz tāfeles, tad ar kārtējo gājienu drīkst uzrakstīt vai nu $x+1$, vai $2x$ (ja izvēlētais rakstāmais skaitlis nepārsniedz 1000). Uzvar tas, kurš uzraksta 1000. Kurš no zēniem uzvar, pareizi spēlējot?

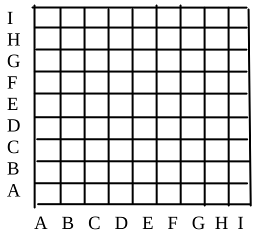
11. klase

1. Atrisināt vienādojumu $x^2+5y^2+2xy+4y+1=0$.

2. a) Vai var 5. zīm. parādītās tabulas rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 9 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos īpašība: ja rinda un kolonna apzīmētas ar vienādiem burtiem, tad tajās ierakstīto skaitļu reizinājumi ir vienādi?
b) Vai var 6.zīm. parādītās tabulas rūtiņās ierakstīt naturālus skaitļus no 1 līdz 81 (katrā rūtiņā – citu skaitli) tā, lai izpildītos tāda pati īpašība?



5. zīm.



6. zīm.

3. Pierādīt, ka punkti, kas ir simetriski trijstūra augstumu krustpunktam attiecībā pret trijstūra malām, atrodas uz trijstūrim apvilktās riņķa līnijas.
(Punktu A_1 sauc par punktam A simetrisku punktu attiecībā pret taisni a, ja $AA_1 \perp a$ un $AO = OA_1$, kur O ir AA_1 un a krustpunkts.)

4. Kvadrāts sastāv no 4×4 vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Katrā rūtiņā novelk vienu diagonāli un vienu no iegūtajiem trijstūriem nokrāso baltu, otru – melnu. Nekādiem diviem vienādi nokrāsotiem trijstūriem nedrīkst būt kopīga mala. Cik dažādi kvadrāta krāsojumi iespējami?

5. Dots, ka n – naturāls skaitlis un skaitļi $2n+1$ un $3n+1$ ir veselu skaitļu kvadrāti.
a) atrodiet kaut vienu tādu n,
b) vai $5n+3$ var būt pirmskaitlis?

12. klase

1. Pierādīt, ka

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{2013}{2014}.$$

2. Trijstūrī *ABC* visas malas dažāda garuma un $\angle B = 60°$. Uz stariem *AB* un *CB* attiecīgi atlikti tādi punkti *X* un *Y*, ka $AX = CY = AC$. Pierādīt, ka taisne *XY* iet caur ΔABC ievilktās riņķa līnijas centru.

3. Vai eksistē tāds naturāls skaitlis *n*, ka $6^n - 1$ dalās ar $4^n - 1$?

4. Ja uz tāfeles uzrakstīti polinomi f un g, tad tur drīkst uzrakstīt arī polinomus $f+g$, $f-g$ un $f\cdot g$ (par f un g var ņemt arī vienu un to pašu polinomu). Vai var iegūt uz tāfeles polinomu *x*, ja sākotnēji uz tāfeles uzrakstīti polinomi

a) $x^2 + x$ un $x^2 + 2$,

b) $x^2 + x$ un $x^2 - 2$?

5. Rindā ir 12 krēsli; uz katra no tiem sēž pa skolēnam. Skolēniem vienu reizi atļauts piecelties un apsēsties citā secībā, pie tam katrs drīkst apsēsties vai nu iepriekšējā vietā, vai tieši blakus iepriekšējai vietai.

Cik dažādi skolēnu izvietojumi iespējami pēc pārkārtošanās?