# Latvijas 64. matemātikas olimpiādes
# 3. posma uzdevumi

## 9. klase

**1.** Kādu mazāko vērtību var pieņemt izteiksme $x+\dfrac{2014}{x}$, ja $x>0$?

**2.** Naturālu skaitļu virknes pirmie trīs locekļi ir vienādi ar 1, bet katrs nākamais ir vienāds ar trīs iepriekšējo skaitļu summu. Cik starp virknes pirmajiem **a)** 100, **b)** 2014 locekļiem ir tādi, kas dalās ar 5?

**3.** Taisnleņķa trijstūra *ABC* taisnais leņķis ir *A*. Punkts *X* ir no *A* pret *BC* vilktā augstuma pamats. Nogriežņa *XC* viduspunkts ir *Y*. Uz malas *AB* pagarinājuma izvēlēts punkts *D* tā, ka $AB = BD$. Pierādīt, ka *DX* ir perpendikulārs *AY*.

**4.** Gatavojoties 13 diplomātu apspriedei, krēsli tika izvietoti ap apaļu galdu vienādos attālumos un katrai no vietām tika sagatavota plāksnīte ar diplomāta vārdu. Diemžēl, ieņemot vietas pie galda, diplomāti šīs plāksnītes neņēma vērā un izrādījās, ka neviens no diplomātiem nav apsēdies pretī savai plāksnītei.

**a)** Pierādīt: nepārsēdinot diplomātus, galdu ir iespējams pagriezt tā, ka vismaz divi diplomāti atradīsies pret savām plāksnītēm.

**b)** Pierādīt: ja sākumā tieši viens diplomāts būtu sēdējis pret savu plāksnīti, tad ir iespējams, ka viņi apsēdušies tā, ka, pagriežot galdu, nav iespējams panākt, ka pret savu plāksnīti atradīsies vairāk par vienu diplomātu.

**5.** Atrast vienādojuma $(x^2+5x-7)^2-2(x^2+5x-6)-4=0$ sakņu kubu summu.

## 10. klase

**1.** Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 5(x+y+z)=xyz \\ x=y+z \end{cases}$$

kur *x*, *y*, *z* – veseli nenegatīvi skaitļi.

**2.** Atrast visas tādas vesela skaitļa *n* vērtības, kurām gan $\dfrac{n^3+3}{n+3}$, gan $\dfrac{n^4+4}{n+4}$ ir veseli skaitļi.

**3.** Ir pieejams neierobežots daudzums 7 un 13 centu pastmarku, kuras izmanto pasta sūtījumu apmaksāšanai. Diemžēl dažas summas nav iespējams apmaksāt tikai ar šīm pastmarkām (piemēram, ja sūtījums maksā 6, 8 vai 25 centus). Kāda ir lielākā summa, kuru **nav** iespējams apmaksāt izmantojot tikai šīs pastmarkas?

**4.** Divas dažāda rādiusa riņķa līnijas ar centriem punktos *B* un *C* ārēji saskaras punktā *A*. Abu riņķa līniju kopējā pieskare, kas neiet caur punktu *A*, pirmajai riņķa līnijai pieskaras punktā *D*, bet otrai – punktā *E*. Taisne, kas novilkta caur *A* perpendikulāri *DE*, krusto nogriežņa *BC* vidusperpendikulu punktā *F*. Pierādīt, ka $BC = 2AF$.

**5.** Gatavojoties vēlēšanām politiskās partijas saviem vēlētājiem kopumā ir devušas *s* (naturāls skaitlis) dažādus solījumus. Zināms, ka jebkurām divām partijām var atrast vismaz vienu solījumu, ko devušas abas partijas. Tajā pat laikā nav iespējams atrast divas partijas, kuru dotie solījumi sakristu pilnībā – ir iespējams atrast vismaz vienu solījumu, ko viena partija ir devusi, bet otra – nē. Kāds ir lielākais iespējamais partiju skaits, kas gatavojas vēlēšanām?

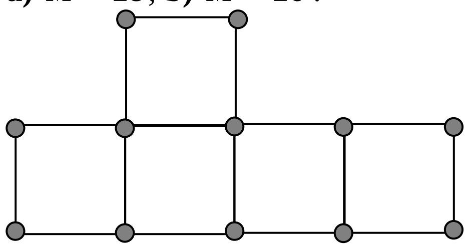
# Latvijas 64. matemātikas olimpiādes
# 3. posma uzdevumi

## 11. klase

**1.** Vai eksistē tāds naturāls skaitlis *n*, ka, noapaļojot izteiksmju $\sqrt{10^{2n}-10^{n}}$ un $\sqrt{10^{2n}-10^{n}+1}$ vērtības līdz tuvākajam naturālajam skaitlim, iegūtie skaitļi ir vienādi?

**2.** Noteikt, kāds ir lielākais skaits, cik no pieciem naturāliem skaitļiem $a$, $a+14$, $a+22$, $a+32$, $a+46$ var būt pirmskaitļi.

**3.** 1. zīmējumā redzamās figūras 12 virsotnēs nepieciešams ierakstīt pirmos 12 naturālos skaitļus (katrā virsotnē – vienu) tā, lai katras rūtiņas virsotnēs ierakstīto četru skaitļu summa būtu vienāda ar *M*. Vai to var izdarīt, ja **a)** $M=28$; **b)** $M=26$?



1. zīm.

**4.** Platleņķa trijstūra *ABC* platais leņķis ir $BAC$. Novilktas trīs riņķa līnijas tā, ka trijstūra *ABC* malas ir attiecīgi šo riņķa līniju diametri. Bez trijstūra virsotnēm riņķa līnijas pa pāriem krustojas vēl trīs punktos – *P*, *Q* un *R*. Pierādīt, ka *A* ir trijstūra *PQR* bisektrišu krustpunkts.

**5.** Naturālus skaitļus *a*, *b* un *c* saista sakarība $c^2=a^2+b^2$. Pierādīt, ka katru no skaitļiem $c^2+ab$ un $c^2-ab$ var izteikt kā divu naturālu skaitļu kvadrātu summu.

## 12. klase

**1.** Izteiksmē $\pm1\pm2\pm3\pm\ldots\pm100=2014$ katru zīmi „$\pm$” aizvietoja vai nu ar „+”, vai „–” tā, lai izteiksme būtu patiesa. Kāds lielākais „+” zīmju skaits var būt šajā izteiksmē?

**2.** Katram naturālam skaitlim $n$ ir definēta funkcija $f(n)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$. Pierādīt, ka visiem $n>1$ ir spēkā sakarība

$$n+f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)=n\,f(n).$$

**3.** Riņķa līnijā ar centru punktā *O* novilkti divi savstarpēji perpendikulāri rādiusi *OA* un *OB*. Nogrieznis *AC* ir trijstūra *BAO* mediāna, *CD* ir trijstūra *ACO* bisektrise, punkts *E* izvēlēts uz mazākā loka *AB* tā, ka *ED* ir trijstūra *AEO* augstums. Aprēķināt leņķa *AED* lielumu grādos.

**4.** Šaha festivālā piedalījās 2014 dalībnieki, daži savā starpā arī izspēlēja vienu šaha partiju. Zināms, ka starp jebkuriem trim festivāla dalībniekiem noteikti ir divi, kuri savā starpā ir izspēlējuši partiju. Kāds ir mazākais iespējamais kopējais šaha partiju skaits, kas ir izspēlētas šajā festivālā?

**5.** Vai var atrast tādu naturālu *n* vērtību, kam piemīt īpašība: visu skaitļa *n* naturālo dalītāju, izņemot 1 un *n*, kvadrātu summa vienāda ar $n^2$.