# Latvijas 41. atklātās matemātikas olimpiādes uzdevumu atrisinājumi

**5.1.** *Pūkainīšu ciemata bērniem Lieldienu zaķis atnesa olas. Katra no tām bija nokrāsota tieši vienā no krāsām – sarkanā, dzeltenā, zilā. Zināms, ka* 20% *jeb* 40 *olas bija sarkanas,* $\frac{3}{4}$ *no atlikušajām bija dzeltenas, bet pārējās – zilas. Aprēķini:*

1) *Cik olas bija zilā krāsā?*
2) *Kāda daļa no visām olām bija zilas?*
3) *Cik procenti no visām olām bija dzeltenas?*

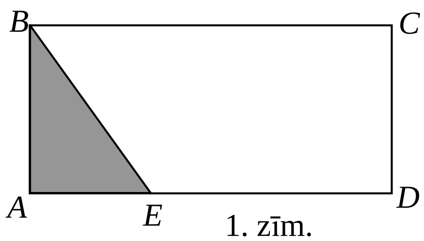
Tā kā 20% jeb 40 olas bija sarkanas, tad Lieldienu zaķis bērniem atnesa 200 olas.

Dzeltenas olas bija $\frac{3}{4}$ no 160 olām, tas ir, 120 dzeltenas olas. Tātad zilo olu skaits bija $200-120-40=40$. No visām olām $\frac{40}{200}=\frac{1}{5}$ bija zilā krāsā. No visām olām $\frac{120}{200}=\frac{60}{100}$ jeb 60% bija dzeltenā krāsā.

**5.2.** *Divu naturālu skaitļu pierakstā izmantoti tikai cipari* 2, 3, 7 *un* 8. *Vai var gadīties, ka viens skaitlis ir tieši trīs reizes lielāks nekā otrs skaitlis?*

Ja skaitļa pēdējais cipars ir 2, 3, 7 vai 8, tad trīs reizes lielāka skaitļa pēdējais cipars ir attiecīgi 6, 9, 1 vai 4, bet pēc uzdevuma nosacījumiem nevienu no šiem cipariem nevar izmantot skaitļu pierakstā. Tātad uzdevumā prasītais nav iespējams.

**5.3.** *Taisnstūra ABCD malu garumi izsakāmi veselos centimetros. Iekrāsotās daļas laukums ir 6 cm$^2$ (skat. 1. zīm.). Nogrieznis AE ir* $\frac{1}{3}$ *no taisnstūra malas AD. Aprēķini taisnstūra laukumu un perimetru, ja zināms, ka viena taisnstūra mala ir par 5 cm garāka nekā otra mala.*

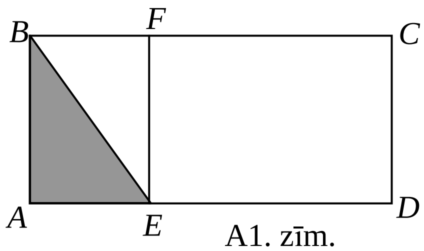



1. zīm.

Ievērojam, ka trijstūra *BAE* laukums ir puse no taisnstūra *BAEF* laukuma (skat. A1. zīm.). Tāpēc *BAEF* laukums ir $6\cdot 2=12$ (cm$^2$). Tā kā *AE* ir $\frac{1}{3}$ no taisnstūra malas *AD*, tad taisnstūra *ABCD* laukums ir trīs reizes lielāks nekā *BAEF* laukums, tas ir, $3\cdot 12=36$ (cm$^2$).
Pēc dotā taisnstūra *ABCD* malu garumi ir veseli skaitļi, tāpēc taisnstūra *ABCD* laukums izsakāms kā divu veselu skaitļu reizinājums. Ievērojam, ka

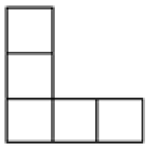
$$36=36\cdot 1=18\cdot 2=12\cdot 3=9\cdot 4=6\cdot 6.$$

Uzdevuma nosacījumiem atbilst tikai reizinātāji 9 un 4. Līdz ar to taisnstūra *ABCD* perimetrs ir $2\cdot(9+4)=26$ (cm).

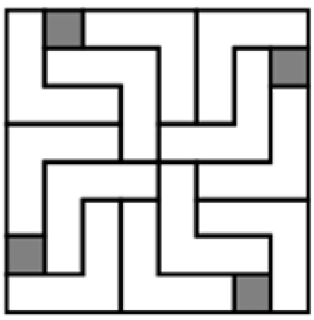


A1. zīm.

**5.4.** *Kvadrāts sastāv no* $8\times 8$ *vienādām kvadrātiskām rūtiņām. Tas sagriezts daļās tā, ka griezumi iet pa rūtiņu robežām.*
*Kāds lielākais skaits daļu var būt tādas kā 2. zīm. attēlotā figūra (figūras var būt pagrieztas jebkurā stāvoklī)?*


2. zīm.

Tā kā $13\cdot 5=65>64$, tad vairāk par 12 norādītajām figūrām izgriezt nevar. Izgriezt 12 figūras var, piemēram, tā, kā parādīts A2. zīm.


A2. zīm.

**5.5.** *Kāds ir* ***a****) mazākais,* ***b****) lielākais skaitlis, kuru var izteikt gan kā trīs, gan kā divu dažādu divciparu naturālu skaitļu reizinājumu?*

**a)** Trīs dažādu divciparu skaitļu mazākais iespējamais reizinājums ir $10\cdot 11\cdot 12=1320$, tas iegūts sareizinot trīs mazākos divciparu skaitļus. Skaitli 1320 var izteikt arī kā divu dažādu divciparu skaitļu reizinājumu. Piemēram, $1320=30\cdot 44$. Tātad mazākais skaitlis, kas apmierina uzdevuma nosacījumus, ir 1320.
**b)** Divu dažādu divciparu skaitļu lielākais iespējamais reizinājums ir $99\cdot 98=9702$, tas iegūts sareizinot divus lielākos divciparu skaitļus. Skaitli 9702 var sadalīt arī trīs divciparu skaitļu reizinājumā. Piemēram, $9702=11\cdot 18\cdot 49$. Tātad skaitlis 9702 ir lielākais meklētais skaitlis.

**6.1.** *Klementīne ar trīs savām draudzenēm brīvdienās gāja makšķerēt. Tētis viņai atļāva paņemt pusi no savas makšķerauklas. 60% no savas daļas viņa atdeva vienai draudzenei, 50% no atlikušās daļas – otrai draudzenei un* $\frac{2}{3}$ *no atlikušās auklas – trešajai draudzenei. Beigās Klementīnei pašai palika 1 metrs makšķerauklas. Cik gara bija makšķeraukla pašā sākumā?*

Pirms makšķerauklas atdošanas trešajai draudzenei Klementīnei bija palicis $3\cdot 1=3$ m. Pirms atdošanas otrai draudzenei bija palicis $2\cdot 3=6$ m. Pirms auklas atdošanas pirmajai draudzenei

Klementīnei bija $6 \cdot 5 : 2 = 15$ m makšķerauklas. Tā kā tētis Klementīnei atļāva paņemt pusi no savas makšķerauklas, tad makšķerauklas garums pašā sākumā bija $2 \cdot 15 = 30$ (m).

**6.2.** *Vai skaitļus no* 1 *līdz* 100 *var sadalīt divās grupās tā, ka skaitļu reizinājumi abās grupās ir vienādi?*

Lai abu grupu skaitļu reizinājumi būtu vienādi, abās grupās kā skaitļu pirmreizinātājiem jābūt pārstāvētiem vieniem un tiem pašiem pirmskaitļiem vienādā skaitā. Taču visi pirmskaitļi, kas lielāki nekā 50 un mazāki nekā 100 pavisam tiek pārstāvēti tikai vienu reizi katrs, tātad skaitļus no 1 līdz 100 nevar sadalīt pa divām grupām tā, lai katrā grupā būtu vienāds skaits.

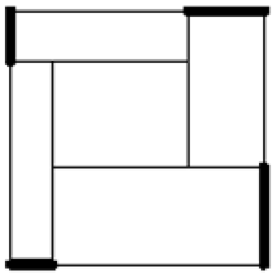
**6.3.** *Ķērpjbārdis aizsūtīja Puszābaku uz veikalu pēc* 3 *ksilofoniem,* 20 *mikrofoniem un viena patafona. Puszābaks atgriezās, nopircis* 20 *ksilofonus, vienu mikrofonu un* 3 *patafonus, pie tam viņš bija iztērējis tieši tik daudz naudas, cik būtu arī, ja būtu nopircis to, ko Ķērpjbārdis viņam lūdza. Zināms, ka patafons ir lētāks nekā ksilofons. Kas ir dārgāks - ksilofons vai mikrofons? Atbildi pamatot!*

Uzrakstām izteiksmi, kas izsaka kopējo pirkuma vērtību:

$$3k + 20m + 1p = 20k + 1m + 3p \quad \text{jeb} \quad 19m = 17k + 2p\,.$$

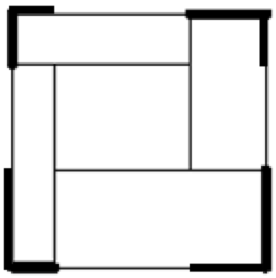
Tā kā patafons ir lētāks nekā ksilofons, tad iegūstam, ka 2 ksilofoni ir dārgāki nekā 2 patafoni. Tāpēc 19 ksilofoni maksā dārgāk nekā 19 mikrofoni. No kā seko, ka ksilofons ir dārgāks nekā mikrofons.

**6.4.** *Kvadrāts, kura malas garums ir* 4 *m, sagriezts taisnstūros, kā parādīts* 3. *zīm. Četru izcelto nogriežņu garumu summa ir* 2 *m. Aprēķināt iekšējā taisnstūra perimetru!*



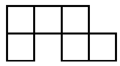
3. zīm.

Katru izcelto nogriezni vēlreiz uzzīmējam uz katram nogrieznim pretējās kvadrāta malas (skat. A3. zīm.). Tad visu astoņu izcelto nogriežņu kopējais garums būs $2 \cdot 2 = 4$ m. Neizcelto nogriežņu kopējais garums ir $4 \cdot 4 - 4 = 12$ (m). Šo neizcelto nogriežņu garums sakrīt ar iekšējā taisnstūra malu garumiem. Tātad iekšējā taisnstūra perimetrs ir 12 m.



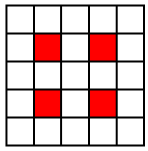
A3. zīm.

**6.5.** *Rūtiņu kvadrātā* $5 \times 5$ *iekrāsot iespējami maz rūtiņu tā, lai atlikušajā daļā vairs nevarētu ievietot nevienu* 4. *zīm. redzamo figūru* (*tā var būt gan pagriezta, gan apgāzta*). *Pamatot, ka iekrāsoto rūtiņu skaits ir mazākais iespējamais!*



4. zīm.

Ievērosim, ka taisnstūrī $2\times5$ jāiekrāso vismaz divas rūtiņas. Tas nozīmē, ka kvadrātā $5\times5$ jāiekrāso vismaz četras rūtiņas. Tas, ka ar četrām iekrāsotām rūtiņām pietiek, redzams A4. zīm.

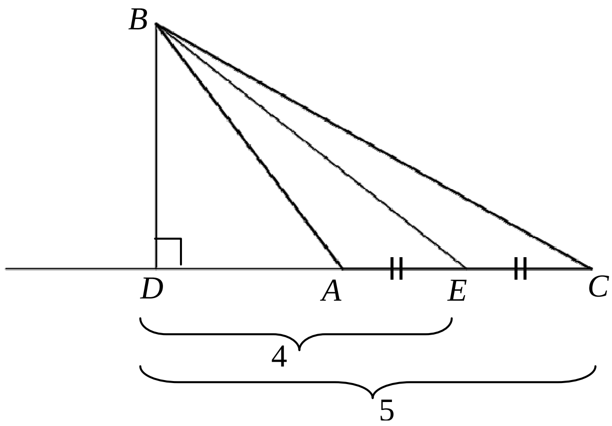


A4. zīm.

**7.1.** *Trijstūrī ABC novilkts augstums BD un mediāna BE. Kāds var būt AC garums, ja $ED = 4$ cm un $DC = 5$ cm?*

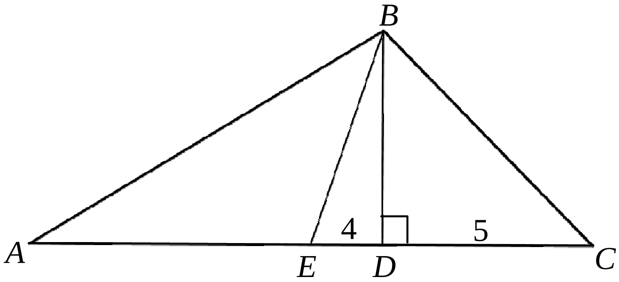
Ievērojam, ka trijstūra mediāna vienmēr atrodas trijstūra iekšpusē, bet augstums var atrasties arī ārpus trijstūra. Iespējami vairāki gadījumi, kā var būt novietots augstums *BD* un mediāna *BE*:

- Punkti *D*, *A*, *E*, *C* ir tieši šādā secībā (skat. A5. zīm.). No nogriežņu garuma īpašībām seko, ka $EC = CD - ED = 5 - 4 = 1$ cm. Tā kā *BE* ir mediāna, tad $AC = 2 \cdot EC = 2 \cdot 1 = 2$ cm.




A5. zīm.

- Punktu secība *A*, *D*, *E*, *C* nav iespējama, jo tad $EC = CD - DE = 5 - 4 = 1$ (cm) un $AC = 2$ cm. No otras puses $AC = AD + DC = AD + 5 > 5$. Iegūta pretruna.
- Punkti *A*, *E*, *D*, *C* ir tieši šādā secībā (skat. A6. zīm.). No nogriežņu garuma īpašībām seko, ka $EC = ED + DC = 5 + 4 = 9$ (cm). Tā kā *BE* ir mediāna, tad $AC = 2 \cdot EC = 2 \cdot 9 = 18$ cm.




A6. zīm.

- Punktu secība *A*, *E*, *C*, *D* nav iespējama, jo tad $ED = EC + CD = EC + 5 > 4$.

Līdz ar to *AC* garums ir 2 cm vai 18 cm.

**7.2.** *Vai var atrast tādus veselus skaitļus a un b, kuriem izpildās vienādība*

$$a \cdot (3a + 5b) \cdot 7b = 7654321 ?$$

Reizinājums $a \cdot (3a + 5b) \cdot 7b$ vienmēr ir pāra skaitlis:

- ja kāds no reizinātājiem $a$ vai $b$ ir pāra skaitlis, tad reizinājums ir pāra skaitlis;
- ja $a$ un $b$ abi ir nepāra skaitļi, tad summa $3a + 5b$ ir pāra skaitlis (divu nepāra skaitļu summa ir pāra skaitlis), tātad viss reizinājums ir pāra skaitlis.

Līdz ar to esam ieguvuši, ka kreisās puses skaitlis ir pāra, bet – labajā puse ir nepāra skaitlis. Iegūta pretruna, tāpēc nevar atrast skaitļus $a$ un $b$, lai izpildītos dotā vienādība.

**7.3.** *Lelde apgalvo, ka sešas skrūves ir smagākas nekā septiņas naglas, bet Elīna apgalvo, ka septiņas skrūves ir smagākas nekā astoņas naglas. Zināms, ka vienai no meitenēm ir taisnība, bet otra kļūdās. Vai tiesa, ka* 18 *skrūves ir smagākas nekā* **a)** 20 *naglas,* **b)** 21 *nagla,* **c)** 22 *naglas? Visām skrūvēm svars ir vienāds, visām naglām arī.*

Aplūkosim, ko no meiteņu apgalvojumiem varētu secināt 42 skrūvju gadījumā:

- ja patiess ir Leldes apgalvojums, tad 42 skrūves ir smagākas nekā 49 naglas;
- ja patiess ir Elīnas apgalvojums, tad 42 skrūves ir smagākas nekā 48 naglas.

No Leldes apgalvojuma patiesuma sekotu arī Elīnas apgalvojuma patiesums. Tā kā ir zināms, ka tikai vienai no meitenēm ir taisnība, bet otrai – nē, tad taisnība ir Elīnai, bet Leldes apgalvojums nav patiess.

Pārbaudīsim, kuri no dotajiem apgalvojumiem var būt patiesi:

**a)** No Elīnas apgalvojuma $7s > 8n$ seko, ka patiess ir arī apgalvojums $18 \cdot 7s > 18 \cdot 8n$ jeb $126s > 144n > 140n$. No $126s > 140n$ seko, ka $18s > 20n$ ir patiess. Tātad apgalvojums „18 skrūves ir smagākas nekā 20 naglas" ir patiess.

**b)** Tā kā Leldes apgalvojums $6s > 7n$ nav patiess, tad apgalvojums $18s > 21n$ (18 skrūves ir smagākas nekā 21 nagla) arī nav patiess.

**c)** Ja $18s > 22n$ būtu patiess, tad arī $18s > 21n$ būtu patiess. Jau b) gadījumā pierādījām, ka otrais apgalvojums nav patiess. Tātad arī apgalvojums $18s > 22n$ (18 skrūves ir smagākas nekā 22 naglas) nav patiess.

**7.4.** *Tabulas* $3 \times 3$ *rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi (skat. 5. zīm.). Kādam skaitlim jābūt rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi? Atrodiet visas iespējamās vērtības un pamatojiet, ka citu nav!*

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | |
| | | **?** |
| 13 | | |

5. zīm.

Apzīmēsim skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar $x$, bet apakšējā – ar $y$. Tad visu rindu, kolonnu un diagonāļu summas ir $24 + x + y$. Tālāk tabulas rūtiņas var aizpildīt šādi (skat. A7. zīm.):

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | |
| | $x$ | |
| 13 | $y$ | |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | 11+$y$ |
| | $x$ | |
| 13 | $y$ | |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | 11+$y$ |
| | $x$ | |
| 13 | $y$ | 11+$x$ |

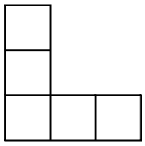
→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | 11+$y$ |
| | $x$ | 2 |
| 13 | $y$ | 11+$x$ |

A7. zīm.

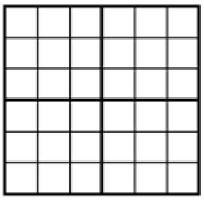
Tātad rūtiņā, kas bija apzīmēta ar jautājuma zīmi, ir ierakstīts skaitlis 2.

**7.5.** *Kādu mazāko skaitu rūtiņu jāizgriež no kvadrāta* $6\times6$, *lai no atlikušās daļas nevarētu izgriezt* 6. *zīm. parādīto figūru?(Figūru malās jāiet pa rūtiņu līnijām.)*

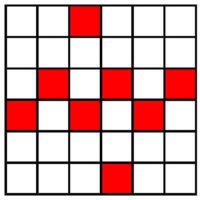


6. zīm.

Sadalām kvadrātu $6\times6$ četros kvadrātos $3\times3$ (skat. A8. zīm.) un ievērojam, ka katrā šādā kvadrātā jāizgriež vismaz divas rūtiņas. Tātad kopā jāizgriež vismaz 8 rūtiņas. Tas, ka ar 8 rūtiņām pietiek, redzams no A9. zīmējuma.



A8. zīm.



A9. zīm.

**8.1.** *Skaitli* $\frac{1}{13}$ *pārveidoja par bezgalīgu decimāldaļu un tajā izsvītroja* 2014. *ciparu aiz komata. Kurš skaitlis lielāks – sākotnējais vai iegūtais?*

Pārveidojot skaitli $\frac{1}{13}$ decimāldaļā (t.i., dalot 1 ar 13), iegūstam

1 : 1 3 = 0, 0 7 6 9 2 3 0 ...
**1 0** 0
9 1
9 0
7 8
1 2 0
1 1 7
3 0
2 6
4 0
3 9
**1 0**
**...**

Tā kā katrs nākamais cipars dalījumā atkarīgs tikai no tā atlikuma, kurš iegūts iepriekšējā dalīšanas solī., tad, līdzko parādās kāds jau iepriekš sastapts skaitlis (atlikums), izveidojas periods. Kā redzam, daļa $\frac{1}{13}=0,(076923)$ ir bezgalīga periodiska decimāldaļa ar perioda garumu 6 cipari. Tātad 2014. vietā aiz komata atrodas tāds pats cipars kā 4. vietā aiz komata, jo $2014=335\cdot6+4$. Tas ir cipars 9. Ja mēs šo ciparu izsvītrojam, tad jauniegūtajā skaitlī 2014. cipars aiz komata būs cipars 2 (nākamais, kas seko aiz 9). Skaitlim $\frac{1}{13}$ un iegūtajam skaitlim ir 0 veseli un pirmie 2013 cipari aiz komata sakrīt, tad lielāks būs tas skaitlis, kuram ir lielāks 2014. cipars aiz komata. Tā kā $9>2$, tad $\frac{1}{13}$ ir lielāka nekā iegūtais skaitlis .

**8.2.** *Atrast visus naturālos skaitļus, kas nepārsniedz* 1 000 000 *un kuri, nosvītrojot to pirmo ciparu, samazinās* 15 *reizes!*

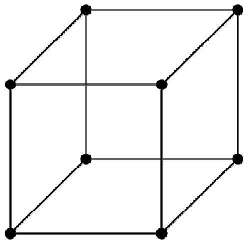
Apzīmēsim meklējamo skaitli ar $a\cdot 10^k + B$, kur $a$ ir pirmais cipars (kas tiek nosvītrots), bet $B$ ir $k$ ciparu skaitlis, kas paliek pēc $a$ nosvītrošanas ($1 \le k \le 5$).

Tad $a\cdot 10^k + B = 15\cdot B \Rightarrow a\cdot 10^k = 14\cdot B \Rightarrow a\cdot 2^k\cdot 5^k = 2\cdot 7\cdot B$.

Tātad $a$ dalās 7. Tā kā $a$ ir cipars, tad $a = 7$ un $B = 2^{k-1}\cdot 5^k = 5\cdot 10^{k-1}$, $1 \le k \le 5$.

Pavisam ir pieci skaitļi, kas apmierina uzdevuma nosacījumus: 75, 750, 7500, 75000, 750000.

**8.3.** *Astoņi punkti savienoti ar šķautnēm kā kuba karkass* (*skat.* 7. *zīm.*). *Pierādīt, ka, izvēloties jebkurus* 5 *punktus, tie būs savienoti ar vismaz* 3 *šķautnēm!*



7. zīm.

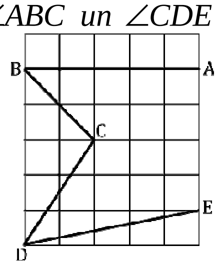
Apskatām kuba augšējo un apakšējo skaldni. Izvēlēto punktu skaitu no augšējās skaldnes apzīmēsim ar $a$, bet no apakšējās – ar $b$. Tad $a+b=5$ un $a \ne b$. Varam pieņemt, ka $a > b$, tāpēc $a \ge 3$ un $a$ var būt 3 vai 4.

Apskatām abus gadījumus:

- Ja $a = 4$, tad augšējie 4 punkti savā starpā jau ir savienoti ar 4 šķautnēm.
- Ja $a = 3$, tad šie augšējie trīs punkti ir savienoti ar $4-2=2$ šķautnēm. Savukārt kāds no apakšējiem diviem punktiem neatradīsies zem tās augšējās kuba virsotnes, kas netika izvēlēta. Tāpēc tas atradīsies zem kāda jau izvēlēta punkta un būs vertikāla kuba šķautne, kurai abi gali ir izvēlētie punkti. Tāpēc kopā būs vismaz $2+1=3$ šķautnes, kas tos savieno.

Līdz ar to esam pierādījuši prasīto.

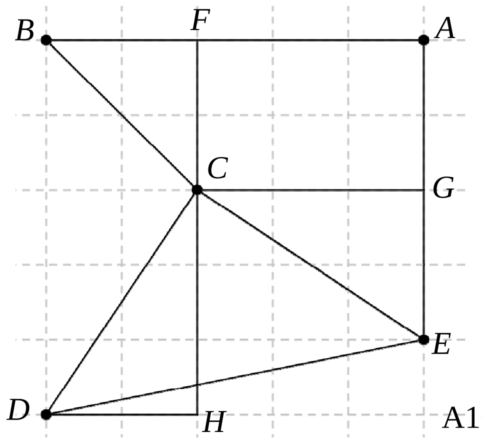
**8.4.** *Rūtiņu lapā rūtiņu virsotnēs atzīmēti punkti A, B, C, D, E un novilkti nogriežņi AB, BC, CD un DE* (*skat. 8. zīm.*). *Kurš no leņķiem* $\angle ABC$ *un* $\angle CDE$ *ir lielāks?*




8. zīm.

Ievērojam, ka trijstūris *BFC* ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris (skat. A10. zīm.), tāpēc $\angle ABC = 45°$.

Trijstūri *DHC* un *EGC* ir vienādi pēc pazīmes „$m\ell m$”, tāpēc $CD = CG$ un $\angle CDH = \angle ECG$ kā atbilstošās malas un leņķi. Iegūst, ka $\angle DCE = \angle DCH + \angle HCE = \angle ECG + \angle HCE = 90°$. Tātad arī trijstūris *DCE* ir vienādsānu taisnleņķa trijstūris, tāpēc $\angle CDE = 45°$. Līdz ar to esam parādījuši, ka $\angle ABC = \angle CDE = 45°$.




A10. zīm.

**8.5.** *Tabulas* $3\times3$ *rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas. Augšējās rindas vidējā rūtiņā ierakstīts skaitlis* 24 (*skat.* 9. *zīm.*). *Vai rūtiņā, kas apzīmēta ar jautājuma zīmi, var būt ierakstīts skaitlis* ***a*)** 7, ***b*)** 17 *?*

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | |
| | | |
| **?** | | |

9. zīm.

Apzīmēsim skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar *x*, bet apakšējā – ar *y*. Tad visu rindu, kolonnu un diagonāļu summas ir $24+x+y$. Tālāk tabulas rūtiņas var aizpildīt šādi:

**a)**

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | |
| | $x$ | |
| 7 | $y$ | |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $17+y$ |
| | $x$ | |
| 7 | $y$ | |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $17+y$ |
| | $x$ | |
| 7 | $y$ | $17+x$ |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $17+y$ |
| | $x$ | $-10$ |
| 7 | $y$ | $17+x$ |

A11. zīm.

Esam ieguvuši pretrunu, ka vidējās rindas labajā rūtiņā jābūt negatīvam skaitlim. Tātad rūtiņā, kas bija apzīmēta ar jautājuma zīmi, nevar būt ierakstīts skaitlis 7.

**b)**

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | |
| | $x$ | |
| 17 | $y$ | |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $7+y$ |
| | $x$ | |
| 17 | $y$ | |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $7+y$ |
| | $x$ | |
| 17 | $y$ | $7+x$ |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $7+y$ |
| | $x$ | 10 |
| 17 | $y$ | $7+x$ |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 24 | $7+y$ |
| $14+y$ | $x$ | 10 |
| 17 | $y$ | $7+x$ |

→

| | | |
|---|---|---|
| $x-7$ | 24 | $7+y$ |
| $14+y$ | $x$ | 10 |
| 17 | $y$ | $7+x$ |

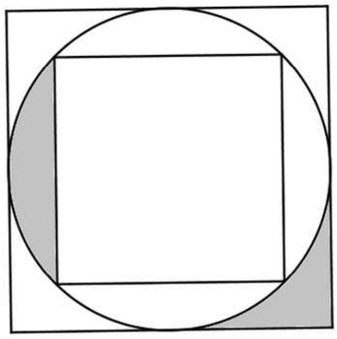
A12. zīm.

Vienas diagonāles skaitļu summa ir $3x$. Tātad $y=2x-24$. Ievietojot $x=13$, iegūsim vienu derīgu tabulas aizpildījumu:

| | | |
|---|---|---|
| 6 | 24 | 9 |
| 16 | 13 | 10 |
| 17 | 2 | 20 |

A13. zīm.

**9.1.** *Kvadrātā, kura malas garums ir* 2, *ievilkts riņķis un šajā riņķī ievilkts kvadrāts* (*skat.* 10. *zīm.*). *Aprēķināt iekrāsoto daļu laukumu summu!*



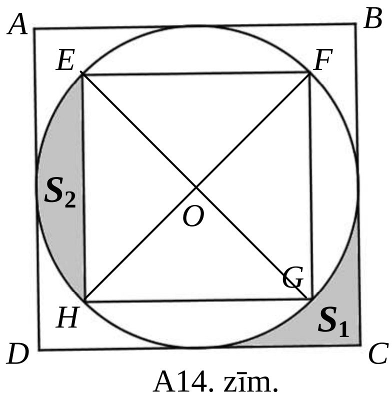
10. zīm.

Ievilktā riņķa rādiusa garums ir puse no kvadrāta $ABCD$ malas garuma, t.i., $EO = FO = \frac{1}{2}AB = 1$. Izmantojot Pitagora teorēmu trijstūrī $EOF$ (skat. A14. zīm.), iegūstam $EF = \sqrt{EO^2 + FO^2} = \sqrt{2}$.

Aprēķinām katras iekrāsotās daļas laukumu:

- $S_1 = \frac{1}{4}(S_{ABCD} - S_{\text{O}}) = \frac{1}{4}(AB^2 - \pi \cdot EO^2) = \frac{1}{4}(4 - \pi)$;
- $S_2 = \frac{1}{4}(S_{\text{O}} - S_{EFGH}) = \frac{1}{4}(\pi \cdot EO^2 - EF^2) = \frac{1}{4}(\pi - 2)$.

Līdz ar to $S_1 + S_2 = \frac{1}{4}(4 - \pi) + \frac{1}{4}(\pi - 2) = \frac{4 - \pi + \pi - 2}{4} = \frac{1}{2}$.




A14. zīm.

**9.2.** *Doti četri dažādi cipari, neviens no tiem nav* 0. *Visu divciparu skaitļu, kurus var izveidot no šiem cipariem, summa ir* 1276. *Atrast dotos četrus ciparus!*

Dotos ciparus apzīmēsim ar *a*, *b*, *c*, *d*. No tiem var izveidot 16 dažādus divciparu skaitļus. Katrs no šiem cipariem četros skaitļos ir desmitu cipars un četros skaitļos – vienu cipars. Visu šo divciparu skaitļu summa ir

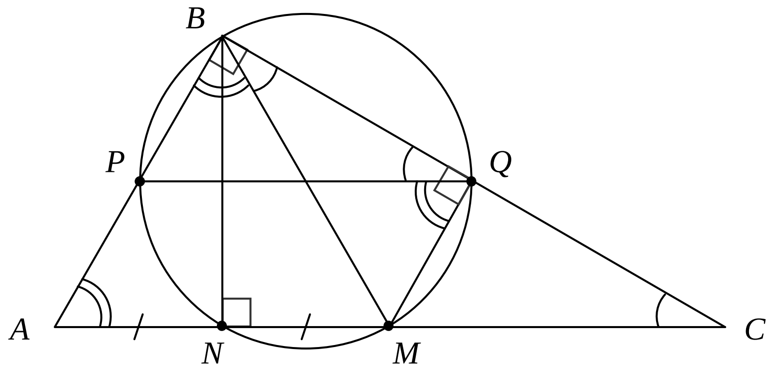
$$4 \cdot 10 \cdot (a + b + c + d) + 4 \cdot (a + b + c + d) = 44(a + b + c + d) = 1276,$$

tātad $a+b+c+d=1276:44=29$. Vienīgā iespēja, ka četru dažādu nenulles ciparu summa ir 29, ir tad, ja šie cipari ir 5, 7, 8 un 9.

**9.3.** *Trijstūrī ABC leņķis $\angle ABC = 90°$. Punkti M un N ir attiecīgi nogriežņu AC un AM viduspunkti. Caur B, M un N vilktā riņķa līnija krusto malas AB un BC attiecīgi to iekšējos punktos P un Q. Zināms, ka $AC||PQ$. Aprēķināt $\angle BAC$ vērtību!*

Apzīmēsim $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, tad $\alpha + \beta = 90°$ (skat. A15. zīm.). No $AC||PQ$ seko, ka $\angle BQP = \angle BCA = \beta$. Tā kā $\angle ABC = 90°$ un $M$ ir hipotenūzas $AC$ viduspunkts, tad $\angle ABM = \angle BAM = \alpha$. Tad $\angle PQM = \angle PBM = \alpha$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku. Līdz ar to $\angle BQM = \angle PQM + \angle BQP = \alpha + \beta = 90°$.

Tādā gadījumā $\angle BNM = 180° - \angle BQM = 90°$ kā pretējie leņķi. Bet no dotā $AN = NM$, tāpēc $BN$ ir mediāna un augstums $\Delta ABM$, tāpēc $AB = BM$. Savukārt no $\angle ABM = \angle BAM$ seko, ka $BM = AM$. Līdz ar to $\Delta ABM$ ir regulārs un $\angle BAC = \angle BAM = 60°$.




A15. zīm.

**9.4.** *Tabulas* $3\times 3$ *rūtiņās katrā rūtiņā jāieraksta pa vienam naturālam skaitlim tā, lai katrā rindā, katrā kolonnā un katrā diagonālē ierakstīto skaitļu summas būtu vienādas, bet visi tabulā ierakstītie skaitļi ir savā starpā atšķirīgi. Ir zināmi divās rūtiņās ierakstītie skaitļi* (*skat.* 11. *zīm.*). *Kāds ir mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā?*

| | | |
|---|---|---|
| | 6 | |
| | **?** | |
| 7 | | |

11. zīm.

Apzīmēsim skaitli, kas atrodas vidējās kolonnas vidējā rūtiņā ar *x*, bet apakšējā – ar *y*. Tad visu rindu, kolonnu un diagonāļu summas ir $6+x+y$. Tālāk tabulas rūtiņas var aizpildīt šādi:

| | | |
|---|---|---|
| | 6 | |
| | $x$ | |
| 7 | $y$ | |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 6 | $y-1$ |
| | $x$ | |
| 7 | $y$ | |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 6 | $y-1$ |
| | $x$ | |
| 7 | $y$ | $x-1$ |

→

| | | |
|---|---|---|
| | 6 | $y-1$ |
| | $x$ | 8 |
| 7 | $y$ | $x-1$ |

→

→

| | | |
|---|---|---|
| $x+1$ | 6 | $y-1$ |
| | $x$ | 8 |
| 7 | $y$ | $x-1$ |

→

| | | |
|---|---|---|
| $x+1$ | 6 | $y-1$ |
| $y-2$ | $x$ | 8 |
| 7 | $y$ | $x-1$ |

A16. zīm.

Vienas diagonāles skaitļu summa ir $3x$. Tātad $y=2x-6$.

| | | |
|---|---|---|
| $x+1$ | 6 | $2x-7$ |
| $2x-8$ | $x$ | 8 |
| 7 | $2x-6$ | $x-1$ |

A17. zīm.

Atliek izvēlēties tādu mazāko *x*, lai visi tabulā ierakstītie skaitļi būtu naturāli un savā starpā atšķirīgi. Jāizpildās nevienādībai $2x-8>0$ jeb $x>4$.

Apskatām iespējamās *x* vērtības:

- $x=5$ neder, jo $x+1=6$, bet tabulā jau ir ierakstīts skaitlis 6;
- $x=6$, $x=7$ un $x=8$ neder, jo tabulā jau ir ierakstīti skaitļi 6, 7, 8;
- $x=9$ neder, jo $x-1=8$, bet tabulā jau ir ierakstīts skaitlis 8;
- $x=10$ der un aizpildīta tabula parādīta A18. zīm.

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 6 | 13 |
| 12 | 10 | 8 |
| 7 | 14 | 9 |

A18. zīm.

Līdz ar to mazākais skaitlis, kas var būt ierakstīts tabulas centrālajā rūtiņā, ir 10.

**9.5.** *Katram marsietim ir trīs rokas un dažas antenas. Visi marsieši sadevās rokās* (*katrs marsietis sadevās rokās ar* 3 *citiem marsiešiem tā, ka visas rokas bija aizņemtas*). *Izrādījās, ka katriem diviem marsiešiem, kas bija sadevuši rokas, antenu skaits atšķīrās tieši* 6 *reizes. Vai kopējais antenu skaits visiem marsiešiem var būt* 2014*?*

Iedomāsimies, ka katram marsietim katrā rokā ir tik margrietiņu, cik viņam ir antenu. Tādā gadījumā margrietiņu kopējais skaits būs trīs reizes lielāks nekā kopējais antenu skaits, t.i., margrietiņu skaits būs $3\cdot 2014$.

No otras puses pēc uzdevumā dotā („antenu skaits atšķīrās tieši 6 reizes”) katras divas savienotas rokas kopā tur margrietiņu skaitu, kas ir skaitļa 7 daudzkārtnis (ja vienam marsietim vienā rokā ir *x* margrietiņas, bet otram – $6x$ margrietiņas, tad abiem kopā ir $7x$ margrietiņas). Tātad margrietiņu kopējam skaitam jādalās ar 7, bet $3\cdot 2014=3\cdot 2\cdot 19\cdot 53$ nedalās ar 7. Līdz ar to esam parādījuši, ka kopējais antenu skaits nevar būt 2014.

**10.1.** *Noteikt, vai virkne* $a_n=\dfrac{3n+7}{n+2}$, *n – naturāls skaitlis, ir augoša vai dilstoša!*

Virkni sauc par augošu (dilstošu), ja katrs nākamais virknes loceklis ir lielāks (mazāks) nekā iepriekšējais.

Apskatām starpību $a_{n+1}-a_n$:

$$a_{n+1}-a_n=\frac{3(n+1)+7}{(n+1)+2}-\frac{3n+7}{n+2}=\frac{3n+10}{n+3}-\frac{3n+7}{n+2}=$$

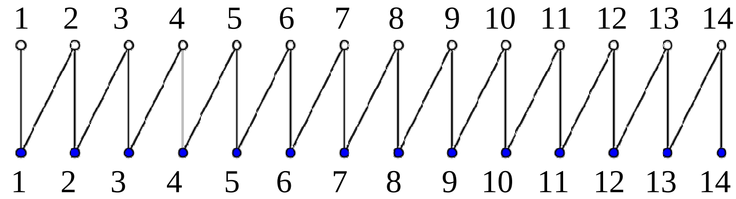
$$=\frac{3n^2+6n+10n+20-(3n^2+7n+9n+21)}{(n+3)(n+2)}=\frac{-1}{(n+3)(n+2)}<0\,.$$

Esam ieguvuši, ka $a_{n+1}<a_n$. Tātad virkne $a_n=\dfrac{3n+7}{n+2}$ ir dilstoša.

**10.2.** *Dotas divas paralēlas taisnes. Uz vienas no tām atzīmēti* 14 *zaļi punkti, uz otras –* 14 *sarkani punkti. Kādu lielāko skaitu nogriežņu, kuriem viens galapunkts ir zaļš, bet otrs – sarkans, var novilkt tā, lai tie nekrustotos?*

*Saka, ka nogriežņi krustojas, ja tiem ir kopīgs iekšējais punkts, t.i., ja tiem ir kopīgs tikai galapunkts, tie nekrustojas.*

Visus zaļos punktus sanumurējam no kreisās uz labo pusi ar skaitļiem no 1 līdz 14 (skat. A19. zīm.). Līdzīgi sanumurējam visus sarkanos punktus. Tā kā nogriežņi nekrustojas, tad tie sakārtoti virzienā no kreisās uz labo pusi. Aplūkojam katra nogriežņa galapunktos ierakstīto skaitļu summas. Tā ir stingri augoša virkne. Mazākā summa ir 2, lielākā – 28. Pavisam iespējamas 27 vērtības. Kā uzzīmēt 27 nogriežņus skat., piem., 17. zīm.




A19. zīm.

**10.3.** *Aplūkosim funkcijas* $y = x^2 + ax + b$*, kur* $a + 2b = 2014$. *Pierādīt, ka visu šādu funkciju grafikiem ir kopīgs punkts!*

Aplūkosim dotās funkcijas vērtību pie $x = \frac{1}{2}$:

$$y = \frac{1}{4} + \frac{a}{2} + b = \frac{1}{2}(a + 2b) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2014 + \frac{1}{4} = 1007\frac{1}{4}.$$

Tātad punkts $\left(\frac{1}{2}, 1007\frac{1}{4}\right)$ ir kopīgs visu funkciju grafikiem.

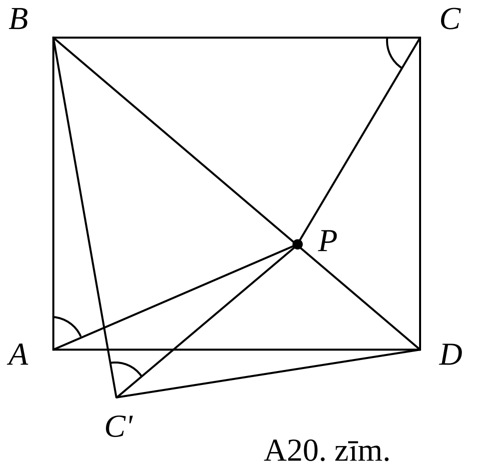
**10.4.** *Doti septiņi dažādi naturāli skaitļi; katriem diviem no dotajiem skaitļiem aprēķināja to summu. Kāds lielākais skaits no šīm summām var būt pirmskaitļi?*

Ja starp dotajiem ir k pāra skaitļi un $7 - k$ nepāra skaitļi, tad starp summām ir $k(7 - k)$ nepāra skaitļi, bet pārējie ir pāra skaitļi un nav pirmskaitļi (neviena no summām nav 2, jo 2 nav izsakāms kā divu dažādu naturālu skaitļu summa). Izteiksme $k(7 - k)$ savu lielāko vērtību, kad $k \in \{0; 1; 2; ...; 7\}$, pieņem pie $k = 3$ un $k = 4$, un šī lielākā vērtība ir 12.

12 pirmskaitļi ir iespējami, piemēram, ja doti skaitļi 2, 4, 8, 14, 3, 9, 15, tad nepāra summas ir 5, 11, 17, 7, 13, 19, 11, 17, 23, 17, 23, 29, kas visas ir pirmskaitļi.

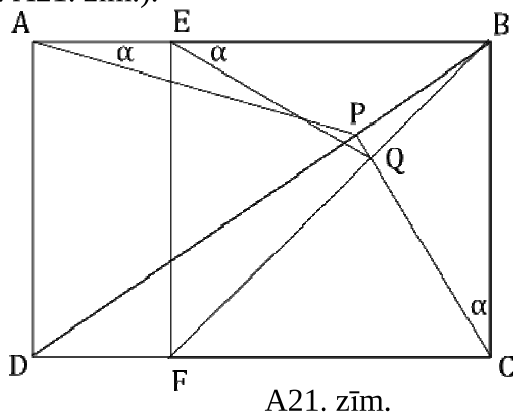
**10.5.** *Uz taisnstūra ABCD diagonāles BD iespējams atrast iekšēju punktu P tā, ka* $\angle PAB = \angle PCB$. *Pierādīt, ka ABCD ir kvadrāts!*

**1. risinājums.** Pieņemsim pretējo, ka *ABCD* nav kvadrāts. Attēlosim punktu *C* simetriski pret taisni *BD* punktā $C'$ (skat. A20. zīm.). No pieņēmuma seko, ka *A* nesakrīt ar $C'$. Ievērojam, ka $\angle BAD = 90°$ un simetrijas dēļ $\angle BC'D = \angle BCD = 90°$. Tāpēc $\angle BAD = \angle BC'D$ un ap $C'ABD$ var apvilkt riņķa līniju. No dotā $\angle PAB = \angle PCB$, un no simetrijas $\angle PAB = \angle PC'B$. Tātad $\angle PAB = \angle PC'B$ un arī ap $C'ABP$ var apvilkt riņķa līniju. Bet caur trīs punktiem (šajā gadījumā $C'$, *A* un *B*) var novilkt tikai vienu riņķa līniju, tāpēc *P* sakrīt ar *D*, kas ir pretrunā ar to, ka *P* ir *BD* iekšējais punkts. Līdz ar to esam pierādījuši, ka *ABCD* ir kvadrāts.




A20. zīm.

**2. risinājums.** Pieņemsim, ka šāds punkts $P$ tomēr eksistē arī taisnstūrim, kas nav kvadrāts ($AD < AB$ un $\angle PAB = \angle PCB = \alpha$). Viegli pamanīt, ka α nevar būt $45°$, jo tad attiecīgie stari no $A$ un $C$ ir paralēli (skat. A21. zīm.).




A21. zīm.

Pieņemsim, ka $\alpha < 45°$.

Atliksim uz malas $AB$ punktu $E$, bet uz malas $CD$ punktu $F$ tā, ka $BEFC$ – kvadrāts ($BE = CF = BC$).

Novilksim kvadrāta diagonāli $BF$. Tā krusto $CP$ punktā $Q$. Savienojot punktu $Q$ ar $E$, iegūstam divus vienādus trijstūrus $BCQ$ un $BEQ$ (pēc pazīmes „$m\ell m$”, jo $BC = BE$, $\angle CBQ = \angle EBQ = 45°$, $BQ$ – kopīga). Tātad $\angle BEQ = \angle BCQ = \alpha$. Tā kā $\alpha < 45°$, tad punkti $P$ un $A$ atrodas taisnes $EQ$ pretējās pusēs – tātad $EQ$ krusto $AP$. Līdz ar to $AP$ un $EQ$ nevar būt paralēli un vienlaikus veidot leņķi $\alpha$ ar $AB$.

Ja $\angle PAB > 45°$, tad par $\alpha$ izvēlas $\angle PAD = 90° - \angle PAB$ un $\angle PCD = 90° - \angle PCB$. Šajā gadījumā kvadrātu būvē uz malas $AD$ un pierādījums ir identisks iepriekšējam. Tātad gadījumā, ja taisnstūris nav kvadrāts, šāds punkts neeksistē. Līdz ar to $ABCD$ jābūt kvadrātam, kas arī bija jāpierāda.

*Piezīme.* Prasīto iespējams pierādīt arī tehniski ar proporciju palīdzību.

**11.1.** *Uz riņķa līnijas atlikti* ***a)*** 6*;* ***b)*** 2014 *punkti. Viens no tiem nokrāsots sarkans, bet pārējie – balti. Apskatām visus daudzstūrus, kuriem visas virsotnes ir kādi no nokrāsotajiem punktiem. Kādu daudzstūru ir vairāk – to, kam viena virsotne ir sarkana, vai to, kam visas virsotnes ir baltas?*

Aplūkosim visus daudzstūrus, kam visas virsotnes ir baltas. Pievienojot katram no tiem sarkano virsotni, iegūsim daudzstūrus, kam viena virsotne ir sarkana, pie tam tie visi būs dažādi. Bez tam vēl ir trijstūri, kam viena virsotne ir sarkana un kurus nevar iegūt no daudzstūriem, kam visas virsotnes ir baltas. Tātad abos gadījumos daudzstūru ar sarkano virsotni ir vairāk.

**11.2.** *Skaitļu virknei* $(a_i)$ *visiem* $n>1$ *ir spēkā sakarība* $a_1+a_2+...+a_n=n^2a_n$. *Aprēķināt* $a_{50}$, *ja zināms, ka* $a_1=1000$.

**1. risinājums.** Apzīmējam $S_n=a_1+a_2+...+a_n$. Tad $n^2a_n=S_n$, $(n+1)^2a_{n+1}=S_{n+1}$ un

$$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n \quad\Rightarrow\quad a_{n+1}(n^2+2n)=n^2a_n \quad\Rightarrow$$

$$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}\cdot a_n=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n+1}a_{n-1}=\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}a_{n-2}=...=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+1}\cdot 2\cdot 1\cdot a_1.$$

Esam ieguvuši, ka $a_n=\dfrac{2a_1}{(n+1)n}$ un varam aprēķināt prasīto $a_{50}=\dfrac{2\cdot 1000}{51\cdot 50}=\dfrac{40}{51}$.

**2. risinājums.** Ievērojam, ka $a_n=\dfrac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n^2-1}$.

Aprēķināsim dažu pirmo virknes elementu vērtības atkarībā no $a_1$ vērtības:

$$a_2=a_1\frac{1}{2^2-1};$$

$$a_1+a_2=a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)=a_3(3^2-1);$$

$$a_3=a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\frac{1}{3^2-1}$$

$$a_1+a_2+a_3=a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)=a_4(4^2-1).$$

Vispārīgā veidā (pierādījums ar matemātiskās indukcijas metodi):

$$a_n(n^2-1)=a_1\left(1+\frac{1}{2^2-1}\right)\left(1+\frac{1}{3^2-1}\right)...\left(1+\frac{1}{(n-1)^2-1}\right)=a_1\frac{2^2\cdot 3^2\cdot...\cdot(n-1)^2}{(2^2-1)(3^2-1)...((n-1)^2-1)}.$$

Izmantojot formulu $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, vienkāršojam iegūto vienādību:

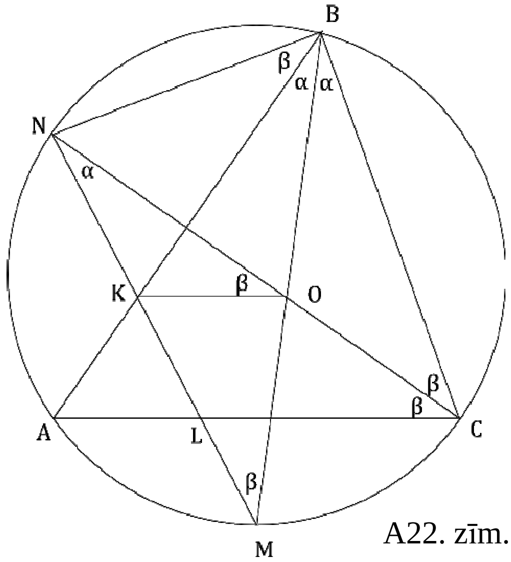
$$a_n=a_1\frac{2^2\cdot 3^2\cdot...\cdot(n-1)^2}{(1\cdot 2\cdot...\cdot(n-2)\cdot(n-1))\cdot(3\cdot 4\cdot...\cdot n\cdot(n+1))}=a_1\frac{2}{n(n+1)}.$$

Ievietojot skaitliskās vērtības, aprēķinām prasīto:

$$a_{50}=1000\cdot\frac{2}{50\cdot 51}=\frac{40}{51}.$$

**11.3.** *Ap šaurleņķu trijstūri ABC apvilkta riņķa līnija. Loka AB* (*kuram nepieder punkts C*) *viduspunkts ir N, bet loka AC* (*kuram nepieder punkts B*) *viduspunkts ir M. Nogrieznis NM krusto malu AB punktā K. Trijstūrī ABC ievilktās riņķa līnijas centrs ir punktā O. Pierādīt, ka* $OK \parallel AC$ *!*

Tā kā *N* un *M* ir attiecīgo loku viduspunkti, tad leņķi, kas balstās uz vienādiem lokiem, ir vienādi: $\angle ABM=\angle CBM=\angle CNM=\alpha$, $\angle ACN=\angle BCN=\angle ABN=\angle NMB=\beta$ (skat. A22. zīm.). Tātad *CN* un *BM* krustojas trijstūra *ABC* bisektrišu krustpunktā. Ap četrstūri *BOKN* var apvilkt riņķa līniju, jo $\angle ONK=\angle OBK=\alpha$ un abi leņķi balstās uz loka *OK*. Tātad $\angle KON=\angle NBK=\beta$ un nogriežņi *OK* un *AC* veido vienādus leņķus ar nogriezni *CN*. Tā kā tie ir kāpšļu leņķi, tad nogriežņi *OK* un *AC* ir paralēli, kas arī bija jāpierāda.




A22. zīm.

**11.4.** *Doti* 99 *naturāli skaitļi. Zināms, ka nav tāda skaitļa, ar ko dalītos visi šie skaitļi, un ka jebkuru* 50 *skaitļu reizinājums dalās ar atlikušo* 49 *skaitļu reizinājumu. Pierādīt, ka visu 99 skaitļu reizinājums ir naturāla skaitļa kvadrāts!*

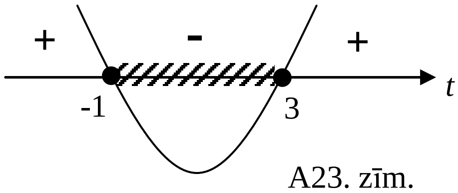
Izvēlamies patvaļīgu pirmskaitli *p*, ar kuru dalās visu doto skaitļu reizinājums. No dotā seko, ka visi skaitļi ir savstarpēji pirmskaitļi. Tāpēc atradīsies tāds skaitlis *c*, kas nav *p* daudzkārtnis. Sadalām atlikušos skaitļus divās grupās katrā pa 49 skaitļiem, grupu skaitļu reizinājumus apzīmējam ar *a* un *b*. No uzdevuma nosacījumiem seko, ka $ac \vdots b$ un $bc \vdots a$. Tas nozīmē, ka reizinājumi *a* un *b* satur skaitli *p* vienā un tajā pašā pakāpē, jo skaitlis *c* nesatur reizinātāju *p*. Tātad visu skaitļu reizinājumā, kas ir vienāds ar $abc$, pirmskaitlim *p* ir pāra pakāpe. Tā kā iegūtais secinājums ir spēkā visiem pirmskaitļiem *p*, tad esam pierādījuši, ka visu doto 99 skaitļu reizinājums ir naturāla skaitļa kvadrāts.

**11.5.** *Pierādīt, ka izliektu* 2014-*stūri nevar sadalīt* 167 *izliektos* 14-*stūros!*

Izliekta 2014-stūra iekšējo leņķu summa ir $2012 \cdot 180°$. Tos ir jānoklāj ar 167 14-stūru leņķiem, kuru kopējais lielums ir $167 \cdot 12 \cdot 180° = 2004 \cdot 180° < 2012 \cdot 180°$. Tātad prasīto izdarīt nav iespējams.

**12.1.** *Atrisināt nevienādību* $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 \le 0$.

Pārveidojam nevienādību formā $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 \le 0$ un, apzīmējot $3^x = t$, iegūstam kvadrātnevienādību $t^2 - 2t - 3 \le 0$. Kvadrāttrinoma saknes ir $t_1 = 3$ un $t_2 = -1$. Atrisinām iegūto kvadrātnevienādību (skat. A23. zīm.).




A23. zīm.

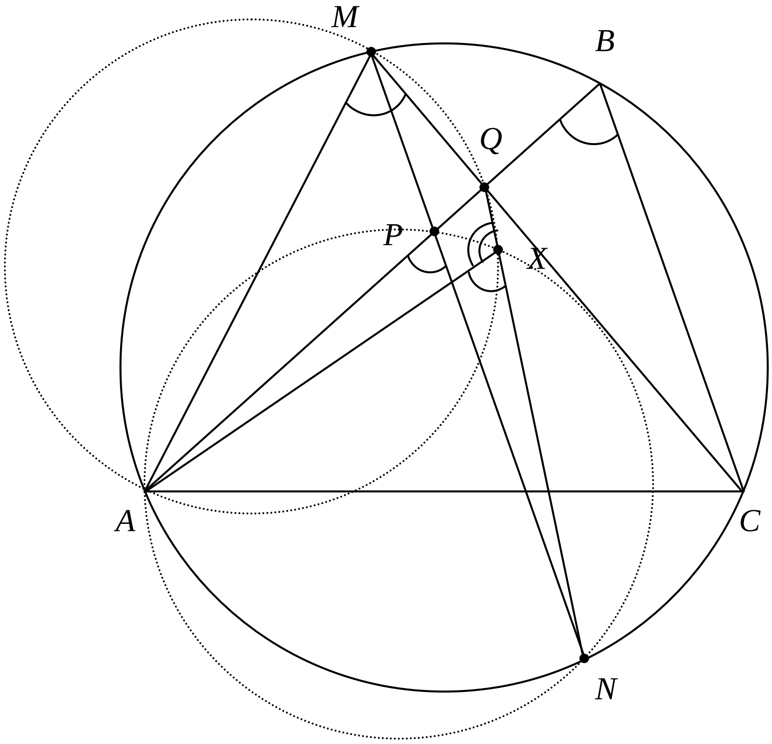
Līdz ar to esam ieguvuši, ka $\begin{cases} t \ge -1 \\ t \le 3 \end{cases}$ jeb $\begin{cases} 3^x \ge -1 \\ 3^x \le 3 \end{cases}$.

Sistēmas pirmā nevienādība ir patiesa visiem reāliem skaitļiem $x$, tāpēc sistēmas un līdz ar to arī dotās nevienādības atrisinājums ir $3^x \le 3^1$ jeb $x \le 1$.

**12.2.** *Caur trijstūra ABC malas AB iekšēju punktu P novilkta taisne, kas ir paralēla BC un krusto ΔABC apvilkto riņķa līniju punktos M un N (M atrodas uz īsākā loka AB, bet N – uz īsākā loka AC). MC krusto AB punktā Q. Pierādīt, ka NQ iet caur trijstūriem AMQ un APN apvilkto riņķa līniju krustpunktu!*

Apzīmēsim $\Delta AMQ$ un $\Delta APN$ apvilkto riņķa līniju krustošanās punktu ar $X$ (skat. A24. zīm.). Lai pierādītu, ka $X$ atrodas uz nogriežņa $QN$, pietiek parādīt, ka $\angle AXQ + \angle AXN = 180°$.

$\angle APN = \angle ABC$, jo $MN || BC$. Savukārt $\angle AXN = \angle APN$ kā ievilktie leņķi, kas balstās uz vienu loku. Kā ievilktie leņķi ir vienādi arī $\angle AMC = \angle ABC$. Bet tā kā $A$, $M$, $Q$, $X$ atrodas uz riņķa līnijas, tad $\angle AXQ = 180° - \angle AMC$. Ieguvām, ka $\angle AXN = \angle ABC$ un $\angle AXQ = 180° - \angle ABC$. To summa ir vienāda ar $180°$, kas arī bija jāpierāda.




A24. zīm.

**12.3.** *Atrast visus pirmskaitļus p, kuriem* $p^4 - 6$ *arī ir pirmskaitlis!*

Apskatām dažas $p$ vērtības:

- ja $p = 2$, tad $p^4 - 6 = 16 - 6 = 10$ – nav pirmskaitlis;
- ja $p = 3$, tad $p^4 - 6 = 81 - 6 = 75$ – nav pirmskaitlis;
- ja $p = 5$, tad $p^4 - 6 = 625 - 6 = 619$ – pirmskaitlis.

Ja $p > 5$, tad tas ir uzrakstāms formā $p = 5k + a$, kur $k$ – naturāls skaitlis un $a \in \{1; 2; 3; 4\}$.

Apskatām iespējamos gadījumus atkarībā no $a$ vērtības:

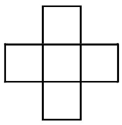
- ja $p = 5k + 1$, tad $p^4 - 6 = (5k+1)^4 - 6 = (5k)^4 + 4 \cdot (5k)^3 + 6 \cdot (5k)^2 + 4 \cdot 5k + 1 - 6 =$

$= (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3 + 6\cdot(5k)^2 + 4\cdot 5k - 5$. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 5, tad skaitlis $p^4 - 6$ dalās ar 5 un tas nav pirmskaitlis;

- ja $p = 5k+2$, tad $(5k+2)^4 - 6 = (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 2 + 6\cdot(5k)^2\cdot 2^2 + 4\cdot 5k\cdot 2^3 + 2^4 - 6 =$ $= (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 2 + 6\cdot(5k)^2\cdot 2^2 + 4\cdot 5k\cdot 2^3 + 10$. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 5, tad skaitlis $p^4 - 6$ dalās ar 5 un tas nav pirmskaitlis;
- ja $p = 5k+3$, tad $(5k+3)^4 - 6 = (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 3 + 6\cdot(5k)^2\cdot 3^2 + 4\cdot 5k\cdot 3^3 + 3^4 - 6 =$ $= (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 3 + 6\cdot(5k)^2\cdot 3^2 + 4\cdot 5k\cdot 3^3 + 75$. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 5, tad skaitlis $p^4 - 6$ dalās ar 5 un tas nav pirmskaitlis;
- ja $p = 5k+4$, tad $(5k+4)^4 - 6 = (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 4 + 6\cdot(5k)^2\cdot 4^2 + 4\cdot 5k\cdot 4^3 + 4^4 - 6 =$ $= (5k)^4 + 4\cdot(5k)^3\cdot 4 + 6\cdot(5k)^2\cdot 4^2 + 4\cdot 5k\cdot 4^3 + 250$. Tā kā katrs no saskaitāmajiem dalās ar 5, tad skaitlis $p^4 - 6$ dalās ar 5 un tas nav pirmskaitlis

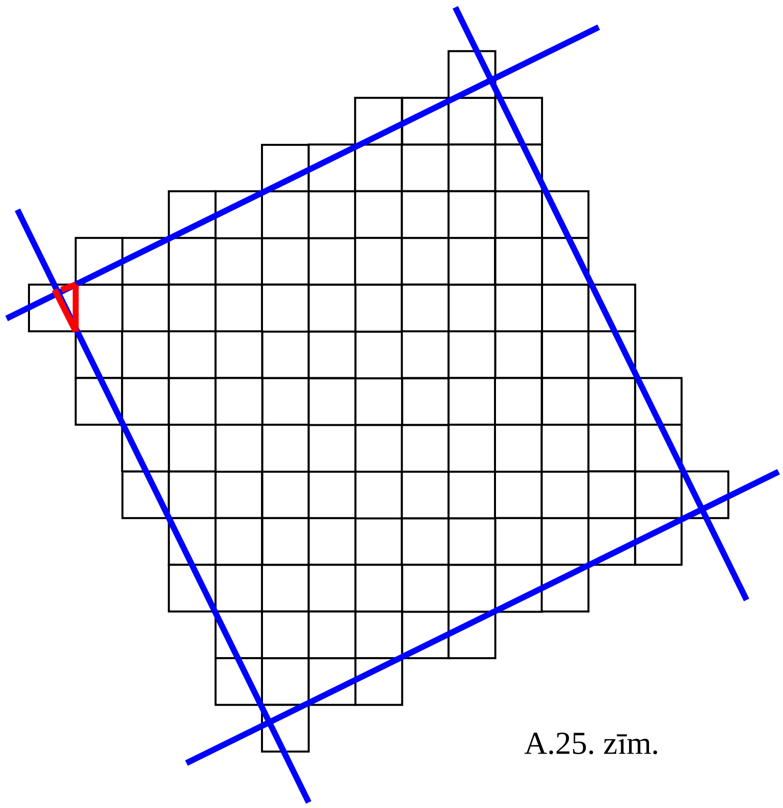
Esam ieguvuši, ka uzdevuma nosacījumus apmierina tikai viena $p$ vērtība $p = 5$.

**12.4.** *Vai kvadrātu ar malas garumu* 10 *var noklāt ar* 25 *„krustiņiem”* (*skat. 12. zīm.*), *kuri sastāv no* 5 *kvadrātiem ar malas garumu* 1*? „Krustiņi” drīkst pārklāties, kā arī iziet ārpus dotā kvadrāta malām.*



12. zīm.

Ievērojam, ka mazā sarkanā trijstūra (skat. A25. zīm.) katešu garumi attiecas kā $1:2$ un tie attiecīgi ir $\frac{1}{\sqrt{5}}$ un $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Kvadrāta malas garums ir vienāds ar $4\sqrt{5} + \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{23}{\sqrt{5}} > 10$. Tātad kvadrātu ar malas garumu 10 rūtiņas var pārklāt ar 25 dotajām figūrām.



A.25. zīm.

**12.5.** *Funkcija* $f : R \to R$ *definēta visiem reāliem skaitļiem un pieņem reālas vērtības. Visiem reāliem skaitļiem a un b izpildās*

$$2f(a) \le f(b) + f(2a-b).$$

*Vai tiesa, ka visiem reāliem a, b un c izpildās*

$$3f(a) \le f(b) + f(c) + f(3a-b-c)\,?$$

Dotajā nevienādībā ņemam $a = \dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}$ un $b = \dfrac{x_1+x_2}{2}$. Tad

$$2f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right) \quad \Rightarrow$$

$$4f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) \le f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4).$$

Tagad pēdējā nevienādībā $x_4$ vietā ievietojot pirmo trīs skaitļu aritmētisko vidējo, t. i., $x_4 = A_3 = \dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, iegūstam vajadzīgo nevienādību:

$$4f\left(\frac{3A_3+A_3}{4}\right) = 4f(A_3) \le f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(A_3) \quad \Rightarrow$$

$$3f(A_3) \le f(x_1) + f(x_2) + f(x_3).$$